



آموزش تخصصی ریاضیات

# امیر وفاعی

## جزوات آموزش ریاضی

# مَثَلَتَات

رشته تجربی:

ریاضی یازدهم فصل ۴

رشته ریاضی:

حسابان یازدهم فصل ۴



 @vafaei\_math

 AmirVafaei6

 0936 879 1709

 www.Donat.academy







## فهرست مطالب

.....	فهرست مطالب	أ
.....	دوره مثلثات دهم	۱
.....	چند تعریف	1-1
.....	تبدیل های معروف	۱-۲
.....	تعریف نسبت های مثلثاتی در یک مثلث قائم الزاویه	۱-۳
.....	دایره مثلثاتی و نسبت های آن و علامتشان	۱-۴
.....	پیدا کردن زوایای مختلف در دایره	۱-۵
.....	جمع بندی علامت ها در دایره مثلثاتی	۶-۱
.....	تبدیل کمان ها	۲
.....	روش سنتی	2-1
.....	۲-۱-۱	۴
.....	۲-۱-۲	۵
.....	۲-۱-۳	۵
.....	اختلاف ۱۸۰ درجه	۶
.....	اختلاف ۹۰	۶
.....	۲-1-6	۷
.....	۲-۱-۷	۷
.....	روش حرفه ای (روش سریع دایره در ذهن)	۲-۲
.....	یک جمع بندی خیلی مهم	۲-۳
.....	مثال های اولیه	۳
.....	دوره روابط مثلثاتی (قسمت اول)	۴
.....	روابط اصلی و فرعی	4-1
.....	اتحادهای اولیه	۴-۲
.....	طول کمان و رادیان (ورود به یازدهم)	۵
.....	شناخت بیشتر نمودارها و توابع مثلثاتی	۶
.....	توابع مثلثاتی	۶-۱



ب

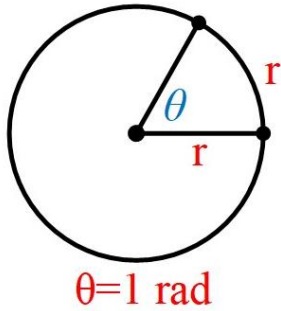
- ۶-۲ دوره تناوب + تانژانت ..... ۱۸
- ۶-۳ چند نمودار کتاب طوری! ..... ۲۰
- ۶-۴ و اما تیب کنکوری ..... ۲۲
- 7 روابط مثلثاتی (قسمت دوم) ..... ۲۴
- 7-1 بسط‌های مثلثاتی ..... ۲۴
- ۱-۱-۷ بسط‌های اولیه / جمع و تفاضل کمان ..... ۲۴
- ۷-۲ نسبت‌ها چند برابر کمان ..... ۲۵
- 7-2-1 فرمول‌های دو برابر ..... ۲۵
- ۷-۲-۲ نتایج مهم (روابط طلایی) ..... ۲۵
- ۷-۲-۳ اتحادهای دو برابر ..... ۲۶
- ۷-۲-۴ مثال‌های دو برابر ..... ۲۷
- ۷-۲-۵ روابط نصف کمان ..... ۲۸
- ۷-۳ تمارین بیشتر روابط ..... ۲۹
- ۸ متفرقه ..... ۳۰
- ۸-۱ چند مهارت پایه‌ای ..... ۳۰
- ۸-۲ از تبدیل کمان ..... ۳۱
- ۸-۳ نمودارها ..... ۳۲
- ۸-۴ دو سوال خوب از توابع مثلثاتی - قلمچی ..... ۳۳
- ۸-۵ ۱۰ تست بیشتر از روابط مثلثاتی مشترک دو رشته ..... ۳۵
- ۹ فرمول نامه روابط مشترک ..... ۳۸
- ۱۰ کاردرخانه ..... ۳۹
- ۱۱ یادداشت ..... ۴۰



## 1 دوره مثلثات دهم

### 1-1 چند تعریف

**درجه:** اگر هر دایره را به ۳۶۰ قسمت مساوی تقسیم کنیم، هر قسمت آن یک قطاع یک درجه می‌باشد.



**رادیان:** هر کمانی از دایره که طول آن برابر شعاع دایره باشد، یک رادیان نام دارد.

در واقع نسبت طول کمانی از دایره به شعاع آن، برابر زاویه کمان برحسب

$$\theta = \frac{l}{r} = \frac{r}{r} = 1 \text{ rad}$$

رادیان می‌باشد.

(زاویه مرکزی روبروی کمان : زاویه کمان)

**محیط دایره:** محیط هر دایره  $2\pi$  برابر شعاع آن است.

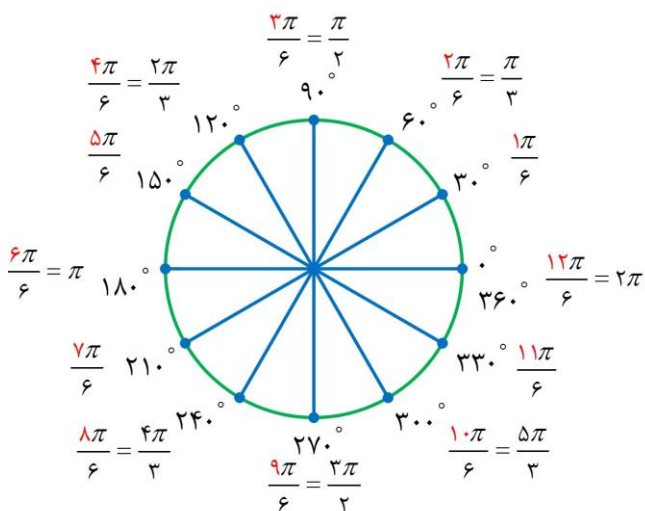
پس  $2\pi$  رادیان برابر با  $360$  درجه است :  $\pi$  رادیان برابر با  $180$  درجه است : داریم

$$\frac{R}{\pi} = \frac{D}{180}$$

تبدیل درجه و رادیان :

### 1-2 تبدیل‌های معروف s

مقدار								واحد
۱	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{12}$	°	Revolutions
$360^\circ$	$270^\circ$	$180^\circ$	$90^\circ$	$60^\circ$	$45^\circ$	$30^\circ$	°	درجه
$2\pi$	$\frac{3\pi}{2}$	$\pi$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$	°	رادیان



$$\frac{1}{\pi} = \frac{D}{180} \rightarrow D = \frac{180}{\pi} \approx 57^\circ$$


یک رادیان

$$\frac{R}{\pi} = \frac{45}{180} \rightarrow R = \pi \frac{45}{180} = \frac{\pi}{4}$$

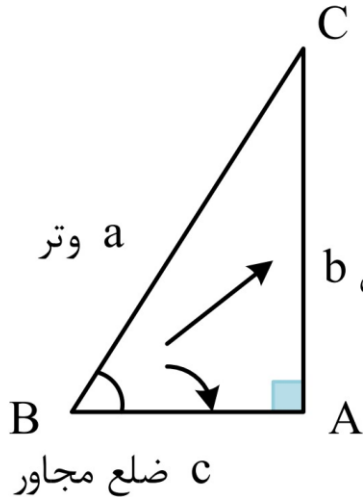
درجه ۴۵

$$\frac{2\pi}{3}$$

رادیان

**تذکره** (زاویه بین عقربه‌های ساعت:  $1 \text{ } \frac{5}{60} \text{ دقیقه} - 30 \text{ ساعت} = |30 \times h - \frac{5}{60} \times m|$ ) 

### ۱-۳ تعریف نسبت های مثلثاتی در یک مثلث قائم الزویه



$$\sin B = \frac{\text{اندازه ضلع مقابل زاویه}}{\text{اندازه وتر}} = \frac{b}{a}$$

$$\cos B = \frac{\text{اندازه ضلع مجاور زاویه}}{\text{اندازه وتر}} = \frac{c}{a}$$

$$\tan B = \frac{\text{اندازه ضلع مقابل زاویه}}{\text{اندازه ضلع مجاور زاویه}} = \frac{b}{c}$$

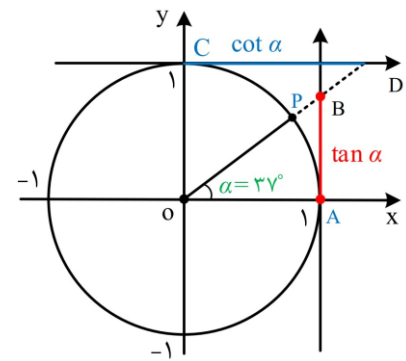
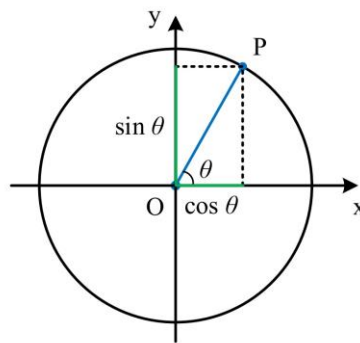
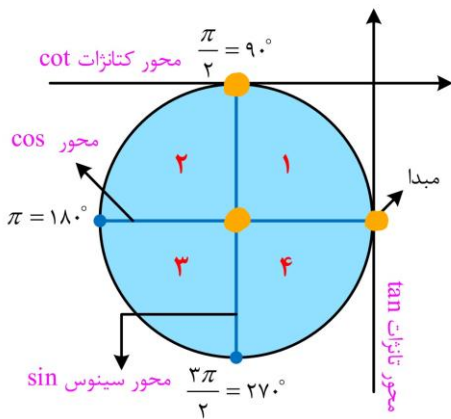
$$\cot B = \frac{1}{\tan B} = \frac{\text{اندازه ضلع مجاور زاویه}}{\text{اندازه ضلع مقابل زاویه}} = \frac{c}{b}$$

$$\tan B = \frac{\sin B}{\cos B}, \quad \cot B = \frac{\cos B}{\sin B}$$

پس با توجه به تعریف های بالا داریم :

### ۱-۴ دایره مثلثاتی و نسبت های آن و علامتشان

به دایره ای با شعاع واحد با جهت مثبت خلاف عقربه های ساعت، دایره مثلثاتی گوئیم.



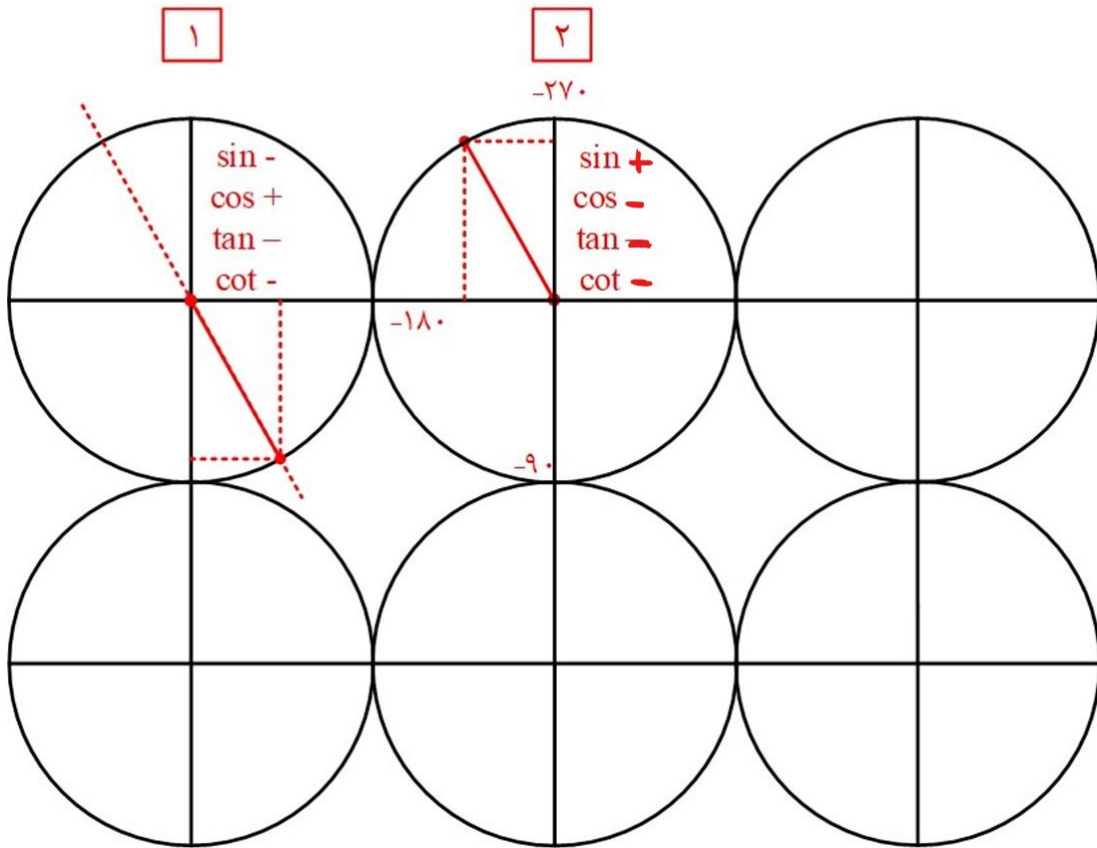
پس کافیهست بعد از پیدا کردن شعاع حامل زاویه برای **سینوس و کسینوس** ، عمود بر محور نموده و برای **تانژانت و کتانژانت** ، آنقدر ادامه دهیم تا آن ها را قطع نماید.

### ۱-۵ پیدا کردن زوایای مختلف در دایره

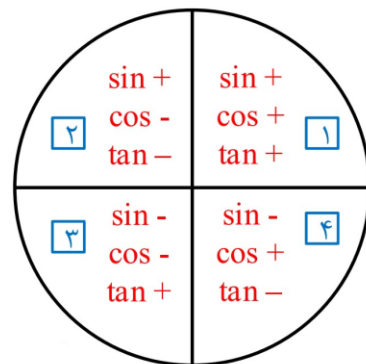
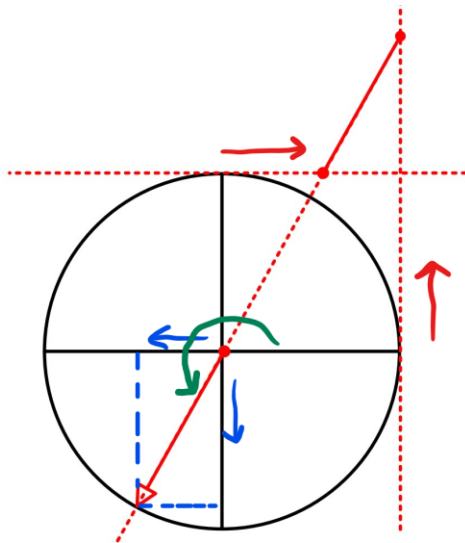
هر دایره معرف ۳۶۰ درجه یا  $2\pi$  رادیان می باشد که به ۴ ناحیه با طول ۹۰ درجه یا  $\frac{\pi}{2}$  رادیان تقسیم می گردد.

**مثال ۱** ? زوایای زیر را در یک دایره کامل به همراه نسبت‌هایشان و علامتشان نشان دهید.

- (1)  $2\pi - \frac{\pi}{4}$  , (2)  $-220^\circ$  , (3)  $-150^\circ$  , (4)  $\frac{3\pi}{4}$  , (5)  $-\frac{3\pi}{2}$  , (6)  $\frac{6\pi}{5}$



۶-۱ جمع‌بندی علامت‌ها در دایره مثلثاتی



**مثال ۲** ? با فرض  $|\sin(x)| + \sin(x) = 0$ ,  $|\cos(x)| - \cos(x) = 0$  انتهای کمان  $x$  در کدام ناحیه قرار دارد؟

$$|\sin(x)| = -\sin(x) \Rightarrow \sin(x)$$

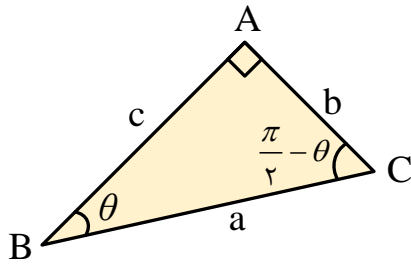
$$|\cos(x)| = \cos(x) \Rightarrow \cos(x)$$

## 2 تبدیل کمان‌ها

### ۲-۱ روش سنتی

#### ۲-۱-۱ متمم

یک مثلث قائم الزاویه دلخواه مانند شکل زیر را در نظر بگیرید.



$\sin \theta = \frac{b}{a}$	$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \frac{c}{a}$
$\cos \theta = \dots$	$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \dots$
$\tan \theta = \dots$	$\tan\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \dots$
$\cot \theta = \dots$	$\cot\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \dots$

در فعالیت قبل زاویه‌های مورد بحث، تند بودند. روابط بدست آمده در آنجا در حالت کلی نیز برقرار است. به طور کلی برای دو زاویه **متمم**  $\theta$  و  $\frac{\pi}{2} - \theta$  همواره روابط زیر برقرار است.

#### جمع‌بندی متمم

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cos \theta$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin \theta$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cot \theta$$

$$\cot\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \tan \theta$$

$$\alpha + \beta = \frac{\pi}{2} \rightarrow \beta = \frac{\pi}{2} - \alpha = \frac{\pi}{2} + (-\alpha)$$

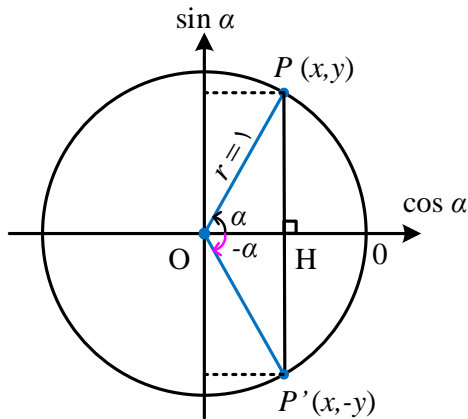
$$\tan \alpha = \cot \beta \Rightarrow \tan \alpha \times \tan \beta = 1$$

**مثال ۳** مقدار  $\tan 88^\circ \times \tan 89^\circ \times \tan 1^\circ \times \tan 2^\circ$  را محاسبه کنید.


**مثال ۴** اگر  $\sin 70^\circ = a$  باشد آنگاه مقدار  $\cos 20^\circ$  را محاسبه کنید؟

**۲-۱-۲ قرینه**

دو زاویه  $\alpha, -\alpha$  را قرینه یکدیگر می‌گویند. اگر در شکل مقابل،  $\alpha = 30^\circ$ ، نسبت‌های مثلثاتی زاویه  $30^\circ$  در  $\triangle OP'H$  عبارتند از:

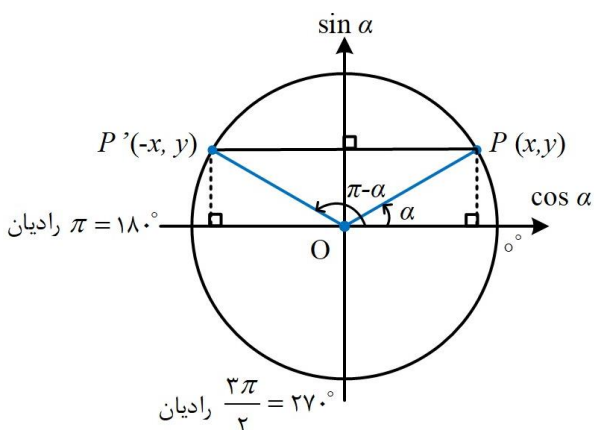


$$\begin{aligned} \sin(-30^\circ) &= \frac{-y}{r} = -\sin 30^\circ = \frac{-1}{2} & \sin 30^\circ &= \frac{y}{r} \\ \cos(-30^\circ) &= \frac{x}{r} = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} & \cos 30^\circ &= \frac{x}{r} \\ \tan(-30^\circ) &= \frac{-y}{x} = -\tan 30^\circ = \frac{-\sqrt{3}}{3} & \tan 30^\circ &= \frac{y}{x} \\ \cot(-30^\circ) &= \frac{-x}{y} = -\cot 30^\circ = -\sqrt{3} & \cot 30^\circ &= \frac{x}{y} \end{aligned}$$

**تذکر (۲)**  قرینه یک نقطه به مختصات  $(x, y)$  نسبت به محور افقی نقطه‌ای به مختصات  $(x, -y)$  است.

**جمع‌بندی زوایای قرینه:**


$$\sin(-x) = -\sin(x) \quad , \quad \cos(-x) = \cos(x) \quad , \quad \tan(-x) = -\tan(x) \quad , \quad \cot(-x) = -\cot(x)$$

**۲-۱-۳ مکمل**


$$\begin{aligned} \alpha = 30^\circ, r = 1 &\Rightarrow \sin 30^\circ = y, \cos 30^\circ = x, \tan 30^\circ = \frac{y}{x} \\ \sin 150^\circ &= \sin(180^\circ - 30^\circ) = y = \sin 30^\circ = \frac{1}{2} \\ \cos 150^\circ &= \cos(180^\circ - 30^\circ) = -x = -\cos 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \tan 150^\circ &= \frac{\sin 150^\circ}{\cos 150^\circ} = \frac{y}{-x} = -\tan 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{3} \\ \cot 150^\circ &= \frac{\cos 150^\circ}{\sin 150^\circ} = \frac{x}{-y} = -\cot 30^\circ = -\sqrt{3} \end{aligned}$$

**جمع‌بندی زوایای مکمل:**

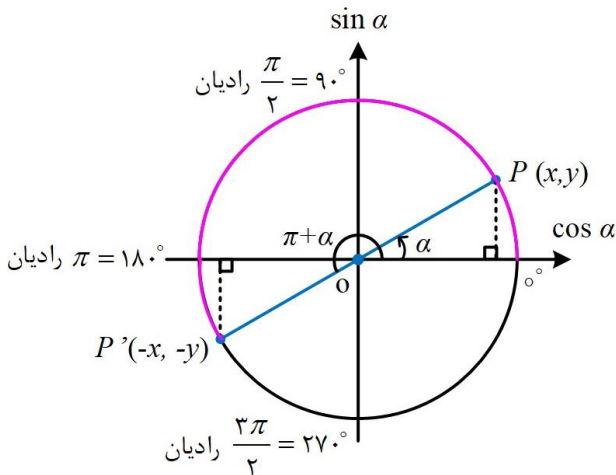
$$\sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha \quad , \quad \cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha \quad , \quad \tan(\pi - \alpha) = -\tan \alpha \quad , \quad \cot(\pi - \alpha) = -\cot \alpha$$

**تذکر (۳)**  قرینه یک نقطه به مختصات  $(x, y)$  نسبت به محور عمودی نقطه‌ای به مختصات  $(-x, y)$  است.

### ۲-۱-۴ اختلاف ۱۸۰ درجه

نسبت‌های مثلثاتی زاویه  $۲۱۰^\circ$  را به دست آورید.

انتهای کمان زاویه  $۲۱۰^\circ$  در ربع سوم واقع است در ضمن  $۱۸۰^\circ + ۳۰^\circ$ ، یعنی اختلاف دو زاویه  $۲۱۰^\circ$  و  $۳۰^\circ$  برابر با  $\pi$  رادیان است. در دایره مثلثاتی مقابل، اگر  $\alpha = ۳۰^\circ$  آنگاه با توجه به مختصات نقطه  $P'$ ، نسبت‌های مثلثاتی زاویه  $۲۱۰^\circ$  عبارتند از:



$$\alpha = 30^\circ, r = 1 \Rightarrow \sin 30^\circ = y, \cos 30^\circ = x, \tan 30^\circ = \frac{y}{x}$$

$$\sin 210^\circ = \sin(180^\circ + 30^\circ) = -y = -\sin 30^\circ = -\frac{1}{2}$$

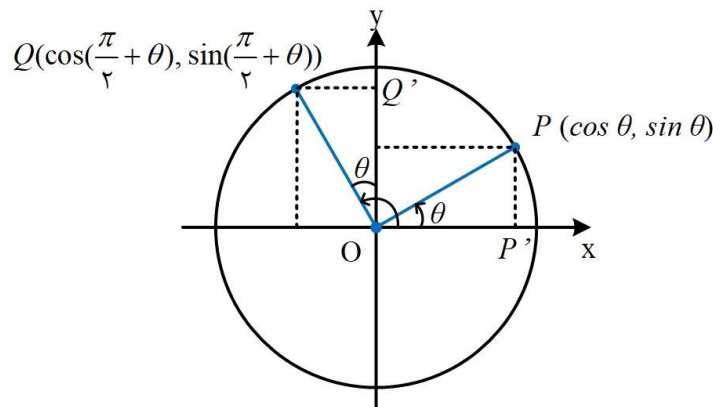
$$\cos 210^\circ = \cos(180^\circ + 30^\circ) = -x = -\cos 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan 210^\circ = \frac{\sin 210^\circ}{\cos 210^\circ} = \frac{-y}{-x} = \tan 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\cot 210^\circ = \frac{\cos 210^\circ}{\sin 210^\circ} = \frac{-x}{-y} = \cot 30^\circ = \sqrt{3}$$

**قرینه نسبت به مبدا : هم طول و هم عرض قرینه می گردند !**

### ۲-۱-۵ اختلاف ۹۰

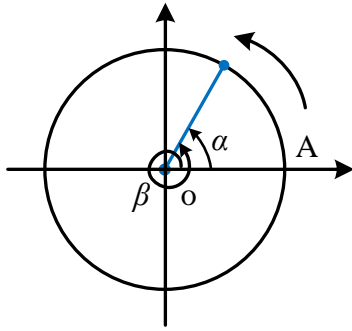


$$\theta, \frac{\pi}{2} + \theta : \Delta OQQ' = \Delta OPP' \Rightarrow PP' = QQ', OP' = OQ'$$

$$x_Q = -y_P \Rightarrow \cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = -\sin \theta \quad , \quad y_Q = x_P \Rightarrow \sin\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = \cos \theta$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right)} = \frac{\cos \theta}{-\sin \theta} = -\cot \theta$$

$$\cot\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = \dots\dots$$



## ۲-۱-۷ جمع بندی

$\sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha$ $\cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha$ $\tan(\pi - \alpha) = -\tan \alpha$ $\cot(\pi - \alpha) = -\cot \alpha$	$\sin(\pi + \alpha) = -\sin \alpha$ $\cos(\pi + \alpha) = -\cos \alpha$ $\tan(\pi + \alpha) = \tan \alpha$ $\cot(\pi + \alpha) = \cot \alpha$
$\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \cos \alpha$ $\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\sin \alpha$ $\tan\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\cot \alpha$ $\cot\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\tan \alpha$	$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos \alpha$ $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin \alpha$ $\tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cot \alpha$ $\cot\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \tan \alpha$
$\sin(\gamma k \pi + \alpha) = \sin \alpha$ $\cos(\gamma k \pi + \alpha) = \cos \alpha$ $\tan(\gamma k \pi + \alpha) = \tan \alpha$ $\cot(\gamma k \pi + \alpha) = \cot \alpha$	$\sin(\gamma k \pi - \alpha) = -\sin \alpha$ $\cos(\gamma k \pi - \alpha) = \cos \alpha$ $\tan(\gamma k \pi - \alpha) = -\tan \alpha$ $\cot(\gamma k \pi - \alpha) = -\cot \alpha$
$\sin(-\alpha) = -\sin \alpha$ $\cos(-\alpha) = \cos \alpha$ $\tan(-\alpha) = -\tan \alpha$ $\cot(-\alpha) = -\cot \alpha$	

## ۲-۲ روش حرفه ای (روش سریع دایره در ذهن)

نوع زاویه	نحوه محاسبه
$\pi \pm \alpha$ , $2\pi \pm \alpha$ $180^\circ \pm \alpha$ , $360^\circ \pm \alpha$	با توجه به اینکه زاویه در کدام ربع قرار دارد، علامت آن را می یابیم. مثلاً $\sin(\pi + \alpha) = -\sin \alpha$ ربع سوم سینوس منفی
$\frac{\pi}{2} \pm \alpha$ , $\frac{3\pi}{2} \pm \alpha$ $90^\circ \pm \alpha$ , $270^\circ \pm \alpha$	مانند بالا عمل می کنیم، با این تفاوت که پس از یافتن علامت، به $\sin$ و $\cos$ برعکس تبدیل می شود. مثلاً ربع سوم تانژانت مثبت $\tan(270^\circ - \alpha) = +\cot \alpha$
$-\alpha$	منفی از تمام نسبت های مثلثاتی به جز کسینوس عبور می کند: $\sin(-\alpha) = -\sin \alpha$ , $\cos(-\alpha) = \cos \alpha$ , $\tan(-\alpha) = -\tan \alpha$ , $\cot(-\alpha) = -\cot \alpha$
$(2k+1)\pi \pm \alpha$ , $2k\pi \pm \alpha$	مضارب زوج $\pi$ را حذف می کنیم و به جای مضارب فرد $\pi$ ، $\pi$ قرار می دهیم. مثلاً $\sin\left(\frac{5\pi}{2} + \alpha\right) = \sin\left(2\pi + \frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = +\cos \alpha$

### خودمونی تر!



زاویه مجهول را در ناحیه اول فرض می کنیم! نگران نباش!

اگر پای  $90^\circ$  یا مضارب فرد  $90^\circ$  وسط بود نسبت ها به برادر خود تبدیل می گردند (معادل  $90^\circ =$ )

اگر پای  $180^\circ$  یا مضارب  $180^\circ$  وسط بود نسبت تغییر نمی کند (معادل  $180^\circ =$ )

علامت هم براحتی با رسم دایره مشخص می گردد (تمرکز روی نسبت سمت چپ)

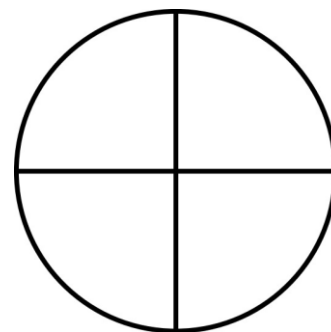
همواره می توانید، اگر عشق کردید، مضارب  $360^\circ$  را اضافه و کم کنید (معادل  $360^\circ =$ )

با من باش با یک مثال «

$$\sin\left(\frac{-\pi}{2} + x\right) = ?$$

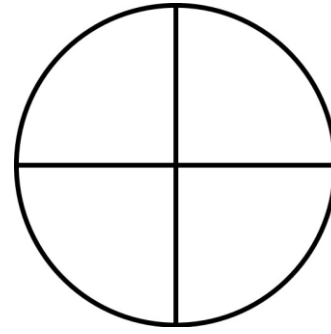
$$\sin\left(\frac{-\pi}{2} + x\right) = \square \cos x$$

$$\sin\left(\frac{-\pi}{2} + x\right) = \square \cos x$$



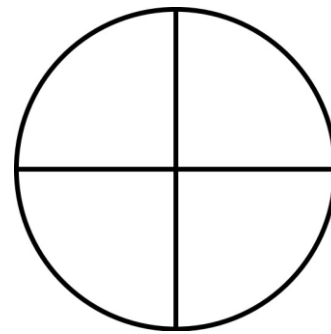
مثال ۵) شما تبدیل کنید

$$\sin\left(\frac{7\pi}{2} - x\right)$$



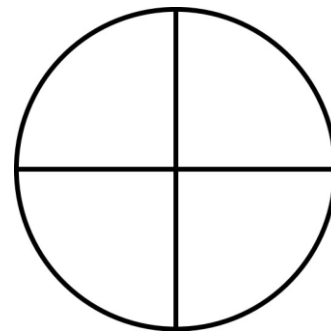
---


$$\cos\left(\frac{3}{2}\pi - x\right)$$



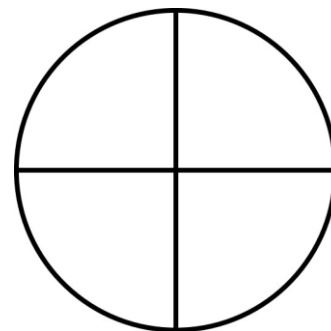
---


$$\operatorname{tg}\left(\frac{-9\pi}{2} + x\right)$$



---


$$\operatorname{cot}\left(\frac{+321\pi}{2} - x\right)$$



## ۲-۳ یک جمع بندی خیلی مهم

	sin	cos	tan	cot
۰	۰	۱	۰	بی نهایت
۳۰	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$
۴۵	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	۱	۱
۶۰	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
۹۰	۱	۰	بی نهایت	۰
۱۲۰	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\sqrt{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$
۱۵۰	$\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	$-\sqrt{3}$
۱۸۰	۰	-۱	۰	بی نهایت
۲۷۰	-۱	۰	بی نهایت	۰
۳۶۰	۰	۱	۰	بی نهایت

بی نهایت یا تعریف نشده ، مساله این است !

$\beta$	$\frac{\pi}{2} + \alpha$	$\pi + \alpha$	$\frac{3\pi}{2} + \alpha$	$\frac{\pi}{2} - \alpha$	$\pi - \alpha$	$\frac{3\pi}{2} - \alpha$	$2\pi - \alpha$
sin $\beta$	cos $\alpha$	-sin $\alpha$	-cos $\alpha$	cos $\alpha$	sin $\alpha$	-cos $\alpha$	-sin $\alpha$
cos $\beta$	-sin $\alpha$	-cos $\alpha$	sin $\alpha$	sin $\alpha$	-cos $\alpha$	-sin $\alpha$	cos $\alpha$
tan $\beta$	-cot $\alpha$	tan $\alpha$	-cot $\alpha$	cot $\alpha$	-tan $\alpha$	cot $\alpha$	-tan $\alpha$
cot $\beta$	-tan $\alpha$	cot $\alpha$	-tan $\alpha$	tan $\alpha$	-cot $\alpha$	tan $\alpha$	-cot $\alpha$

مثال ۶ (تمرین) نسبت‌های  $\frac{3\pi}{2} \pm \alpha$  را محاسبه نمایید.

### 3 مثال های اولیه

**مثال ۷** محاسبه نمائید:

$$\cos\left(\frac{7\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(3\frac{1}{2}\pi - \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(2\pi + \frac{3\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cot\left(\frac{11\pi}{6}\right) =$$

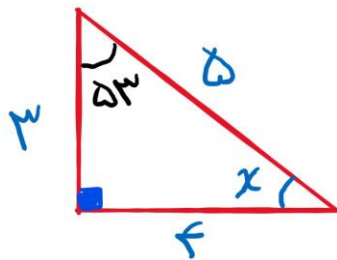
$$\sin\left(\frac{-1000\pi}{3}\right) = -\sin\left(\frac{999\pi + \pi}{3}\right) = -\sin\left(333\pi + \frac{\pi}{3}\right) =$$

$$-\sin\left(332\pi + \pi + \frac{\pi}{3}\right) = -\sin\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) = -(-\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan\left(\frac{71\pi}{2} + \frac{\pi}{4}\right) =$$

**مثال ۸** اگر داشته باشیم  $\sin(x) = \frac{3}{5}$  حاصل  $\cos\left(\frac{17\pi}{2} + x\right)$  را محاسبه کنید.

مثلث طلایی- فیزیک




$$\begin{aligned} \sin x &= \sin 37^\circ = \frac{3}{5} = \frac{3}{5} = \cos 53^\circ \\ \cos x &= \cos 37^\circ = \frac{4}{5} = \frac{4}{5} = \sin 53^\circ \\ \tan x &= \tan 37^\circ = \frac{3}{4} = \cot 53^\circ \end{aligned}$$


**مثال ۹** در مثلث ABC نشان دهید  $\sin\left(\frac{A}{2}\right) = \cos\left(\frac{B+C}{2}\right)$ ,  $\tan(A+B) = -\tan(C)$


$$A + B + C = \pi \rightarrow A + B = \pi - C \rightarrow$$

$$\tan(A+B) = \tan(\pi - C) = -\tan(C) \rightarrow \tan(A+B) + \tan(C) = 0$$

دومی تمرین:


**مثال ۱۰**  اگر  $\tan(35) = 2a - 1$  باشد حاصل  $\frac{\sin(145) - \sin(305)}{\cos(-325)}$  چقدر است؟ (بر حسب  $a$ )

**مثال ۱۱**  (تمرین) اگر  $\tan(20) = 0/4$  باشد حاصل  $\frac{\sin(250) + \sin(700)}{\cos(560) - \cos(110)}$  چقدر است؟

**مثال ۱۲**  حاصل عبارت زیر را بدست آورید

$$A = \sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) + \sin\left(\frac{5\pi}{4}\right) + \sin\left(\frac{7\pi}{4}\right) + \sin\left(\frac{9\pi}{4}\right) = ?$$

$$A = \sin\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(\pi + \frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(2\pi - \frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(2\pi + \frac{\pi}{4}\right) = \sin \frac{\pi}{4} - \sin \frac{\pi}{4} - \sin \frac{\pi}{4} + \sin \frac{\pi}{4} = 0$$

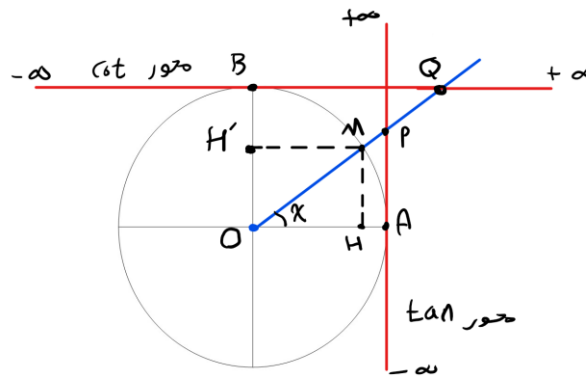
**مثال ۱۳**  حاصل عبارت زیر را بدست آورید

$$\sin\left(\frac{\pi}{7}\right) + \cos\left(\frac{5\pi}{14}\right) - 2\sin\left(\frac{6\pi}{7}\right)$$

هر وقت زاویه ها رند نبودند، جمع و تفریقشان را چک کنید خدا بزرگ است . اتفاقی جذاب در راه است ! 

## 4 دوره روابط مثلثاتی (قسمت اول)

## 4-1 روابط اصلی و فرعی



$$\begin{aligned} OH' &= \sin x \\ OH &= \cos x \\ AP &= \tan x \\ BQ &= \cot x \end{aligned}$$

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}, \quad \cot x = \frac{\cos x}{\sin x} \rightarrow \tan x \cot x = 1, \quad \tan x = \frac{1}{\cot x}$$

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \rightarrow \div \cos^2 x \rightarrow 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \rightarrow \div \sin^2 x \rightarrow 1 + \cot^2 x = \frac{1}{\sin^2 x}$$

$$\sin^2 x = \frac{1}{1 + \cot^2 x} = \frac{\tan^2 x}{1 + \tan^2 x}, \quad \cos^2 x = \frac{1}{1 + \tan^2 x} = \frac{\cot^2 x}{1 + \cot^2 x}$$

## 4-2 اتحادهای اولیه

$$\bullet (\sin x \pm \cos x)^2 = \sin^2 x + \cos^2 x \pm 2\sin x \cos x = 1 \pm 2\sin x \cos x$$

$$\bullet \bullet \sin^4 x + \cos^4 x = 1 - 2\sin^2 x \cos^2 x$$

$$1 = (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 = \sin^4 x + \cos^4 x + 2\sin^2 x \cos^2 x \rightarrow \dots$$

$$\bullet \bullet \bullet \sin^6 x + \cos^6 x = 1 - 3\sin^2 x \cos^2 x$$

$$1 = (\sin^2 x + \cos^2 x)^3 = \sin^6 x + \cos^6 x + 3\sin^2 x \cos^2 x (\cancel{\sin^2 x + \cos^2 x}) = \dots$$

$$\bullet \bullet \bullet \bullet \frac{1}{\sin^2 x} + \frac{1}{\cos^2 x} = \frac{1}{\sin^2 x \cos^2 x} = (1 + \tan^2 x)(1 + \cot^2 x) = 2 + \tan^2 x + \cot^2 x = (\tan x + \cot x)^2$$

$$\frac{1}{\sin^2 x} + \frac{1}{\cos^2 x} = (1 + \tan^2 x) + (1 + \cot^2 x) = 2 + \tan^2 x + \cot^2 x = (\tan x + \cot x)^2$$

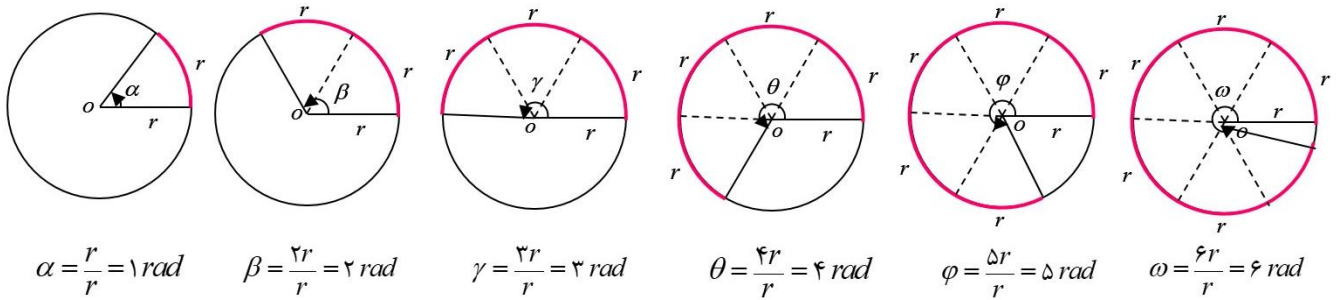
$$\bullet \bullet \bullet \bullet \bullet \sin^4 x + \cos^2 x = \sin^2 x + \cos^4 x$$

$$\cos^4 x - \sin^4 x = (\cos^2 x - \sin^2 x)(\cos^2 x + \sin^2 x) \rightarrow \cos^4 x - \sin^4 x = \cos^2 x - \sin^2 x \rightarrow \dots$$

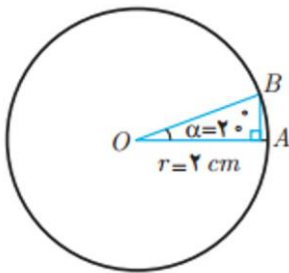
$$\bullet \bullet \bullet \bullet \bullet \bullet 2\sin x \cos x = \sin 2x$$

$$\bullet \bullet \bullet \bullet \bullet \bullet \tan x + \cot x = \frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin x \cos x} = \frac{1}{\sin x \cos x} = \frac{2}{\sin 2x}$$

## ۵ طول کمان و رادیان (ورود به یازدهم)



**مثال ۱۴** در شکل مقابل اندازه زاویه  $\alpha$  را برحسب رادیان به دست آورید. سپس طول  $AB$  را پیدا کنید.



حل: از مثال قبل می‌دانیم که هر زاویه  $180^\circ$  برابر  $\pi$  رادیان است.

بنابراین داریم:

$$\frac{20}{\alpha(\text{rad})} = \frac{180}{\pi} \Rightarrow \alpha = \frac{20 \cdot \pi}{180} = \frac{\pi}{9} \text{ rad}$$

$$\alpha = \frac{AB}{r} \Rightarrow \frac{\pi}{9} = \frac{AB}{2} \Rightarrow AB = \frac{2\pi}{9} \text{ cm}$$

**مثال ۱۵** در شکل مقابل، یک تسمه دو قرقره به شعاع‌های  $10 \text{ cm}$  و  $2/5 \text{ cm}$  را به هم وصل کرده است.

بررسی کنید که وقتی قرقره بزرگتر  $\frac{\pi}{2}$  رادیان می‌چرخد (یعنی نقطه  $P$  در موقعیت  $P'$  قرار می‌گیرد) قرقره کوچکتر چند رادیان می‌چرخد؟ ( $\pi \text{ rad} = 3/14 \text{ rad}$ )

حل: ابتدا مسافتی را که نقطه  $P$  بر روی محیط قرقره بزرگتر طی می‌کند به دست می‌آوریم:

$$\theta = \frac{PP'}{r} \Rightarrow PP' = r\theta = 10 \times \frac{\pi}{2} = 5\pi \text{ cm} = 15/7 \text{ cm}$$

چون قرقره با یک تسمه به هم متصل هستند پس قرقره کوچکتر نیز  $5\pi$  حرکت می‌کند. برای

$$\theta = \frac{l}{r} = \frac{5\pi}{2/5} = \frac{5\pi}{5/2} = 2\pi \text{ rad}$$

این قرقره داریم:

بنابراین قرقره بزرگتر ربع دور می‌چرخد، قرقره کوچکتر یک دور کامل می‌چرخد و نقطه  $Q$  به

مکان خود بازمی‌گردد. (آخرین مثال متفرقه، ویژه رشته ریاضی بررسی گردد)

## 6 شناخت بیشتر نمودارها و توابع مثلثاتی

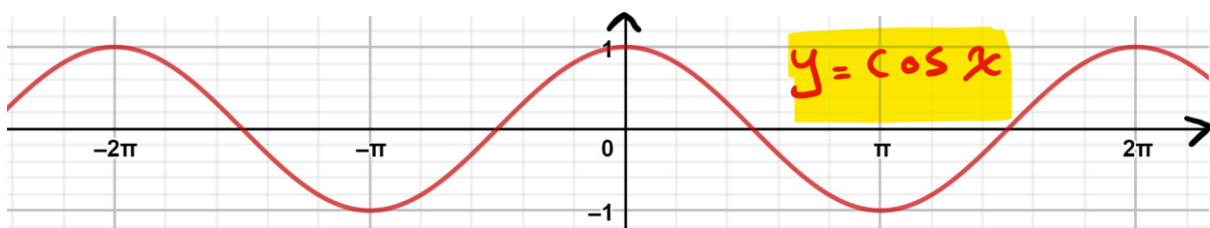
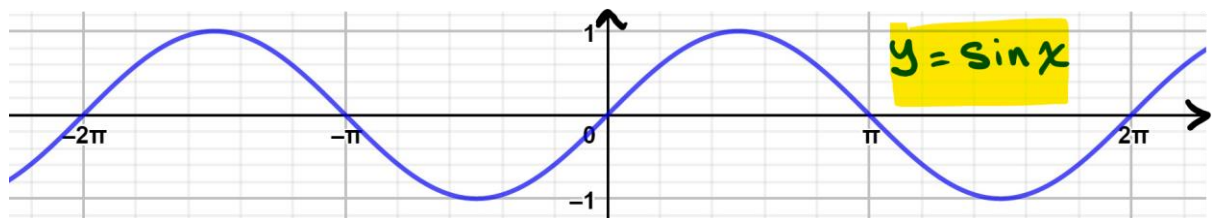
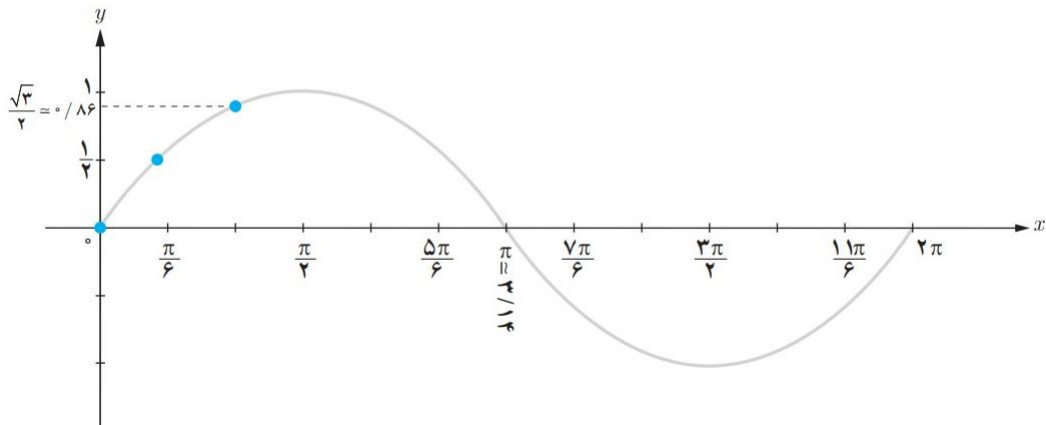
### 6-1 توابع مثلثاتی

۱ در جدول زیر نسبت سینوس به ازای برخی مقادیر در بازه  $[0, 2\pi]$  مشخص شده است. این جدول را تکمیل کنید.

$x$ (رادیان)	$0$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\pi$	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{11\pi}{6}$	$2\pi$
$y = \sin x$	$0$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0.86$			$0$		$-1$		

۲ جدول بالا به صورت زوج مرتب در زیر داده شده است. با توجه به جدول فوق مجموعه زوج مرتبها را تکمیل و سپس نقاط به دست آمده را در دستگاه مختصات زیر پیدا کنید. آیا نقاط متناظر با زوجهای مرتب روی منحنی داده شده قرار می گیرند؟ آیا این منحنی تابع است؟ (با رسم خطوط موازی محور  $y$ ها بررسی کنید).

$$f = \left\{ (0, 0), \left(\frac{\pi}{6}, \frac{1}{2}\right), \left(\frac{\pi}{3}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right), \left(\frac{\pi}{2}, \dots\right), \left(\frac{5\pi}{6}, \dots\right), (\dots, 0), \left(\frac{7\pi}{6}, \dots\right), \left(\frac{3\pi}{2}, -1\right), \left(\frac{11\pi}{6}, \dots\right), (2\pi, \dots) \right\}$$



۱- با توجه به شکل بالا جاهای خالی را درباره ویژگی‌های تابع سینوس با ضابطه  $y = \sin x$  کامل کنید.

الف) دامنه تابع سینوس ..... و برد آن ..... است.

ب) مقدار تابع سینوس در طول‌های  $x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$  برابر با ..... است.

پ) حداکثر مقدار تابع سینوس برابر با ..... است که در نقاطی به طول‌های  $x = \frac{\pi}{2}$ ،

.....،  $x = \dots\dots\dots$ ،  $x = \dots\dots\dots$  و در حالت کلی  $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$  به

دست می‌آید.

ت) حداقل مقدار تابع سینوس برابر با ..... است که در نقاطی به

طول‌های  $x = \frac{3\pi}{2}$ ،  $x = \dots\dots\dots$ ،  $x = \dots\dots\dots$  و در حالت

کلی  $x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$  به دست می‌آید.

۲- با توجه به شکل صفحه قبل جاهای خالی را در خصوص ویژگی‌های تابع با ضابطه  $y = \cos x$  کامل کنید.

الف) دامنه تابع کسینوس ..... و برد آن ..... است.

ب) مقدار تابع کسینوس در طول‌های ..... برابر صفر است.

پ) حداکثر مقدار تابع کسینوس ..... است که در طول‌های  $x = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$  به

دست می‌آید.

ت) حداقل مقدار تابع کسینوس ..... است که در طول‌های ..... به

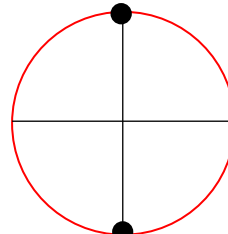
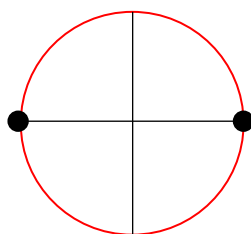
دست می‌آید.

۳- در مورد صعودی و نزولی بودن این توابع در بازه‌های مختلف بحث کنید. (با فلش در شکل!)

یک توضیح جذاب

$$\sin x = 0 \rightarrow x = k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}) \quad x = \{\dots, -3\pi, -2\pi, -\pi, 0, \pi, 2\pi, 3\pi, \dots\}$$

$$\cos x = 0 \rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{2} \quad (k \in \mathbb{Z}) \quad x = \left\{ \dots, \frac{-5\pi}{2}, \frac{-3\pi}{2}, \frac{-\pi}{2}, 0, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \dots \right\}$$



دو تمرین برای شما در منزل!

**مثال ۱۶** ? در طراحی روبات‌های صنعتی برای انعطاف

بیشتر در حالت روبات‌ها، معمولاً دو مفصل مکانیکی برای بازوی آن به صورت روبه‌رو در نظر می‌گیرند.

الف) ارتفاع نوک گیره این روبات را، از سطح زمین، براساس توابعی از  $\theta$  و  $\alpha$  مدلسازی کنید.

$$\left(-\frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\right)$$

$$h = 50 + h_1 + h_2 = 50 + 100 \sin \theta + 53 \sin \alpha$$

ب) فرض کنید این روبات برای گرفتن یک شیء در

ارتفاع  $23/5 \text{ cm}$  مفصل دوم خود را در حالت  $\alpha = -30^\circ$

قرار داده است. تعیین کنید زاویه  $\theta$  در این وضعیت

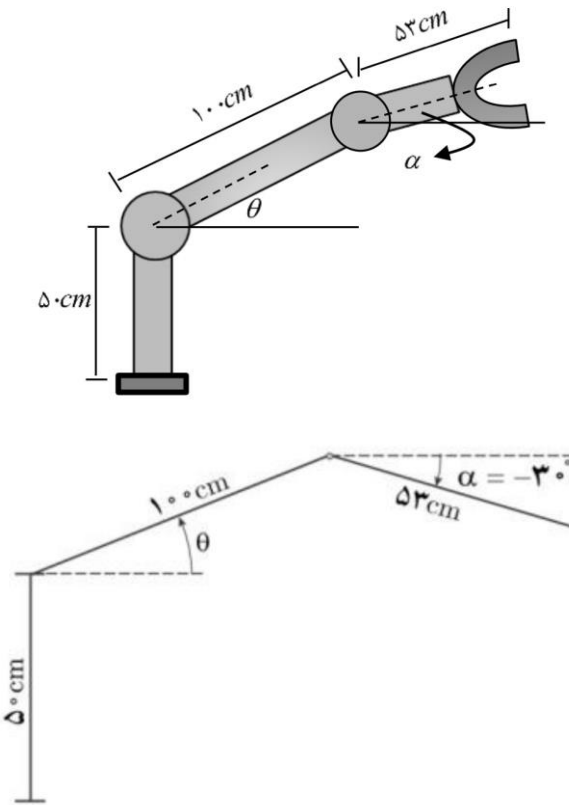
چند درجه است؟

$$23/5 = 50 + 100 \sin \theta + 53 \sin(-30^\circ)$$

$$\Rightarrow 23/5 = 50 + 100 \sin \theta - 26/5$$

$$\Rightarrow 50 = 50 + 100 \sin \theta$$

$$\Rightarrow \sin \theta = 0 \xrightarrow{0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}} \theta = 0$$

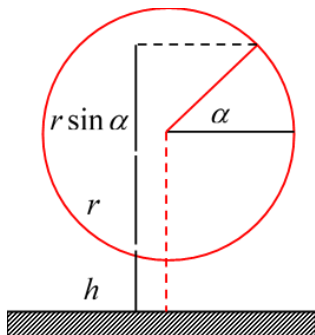


**مثال ۱۷** ? چرخ و فلکی به شعاع ۱۵ متر، هر ۵ دقیقه یک دور در خلاف جهت

عقربه‌های ساعت می‌چرخد. شخصی از سکویی که ارتفاع آن ۵ متر است. بالا رفته و

سوار پایین‌ترین کابین می‌شود. پس از ۱۰۰ ثانیه این شخص در چه ارتفاعی از زمین

قرار دارد؟



$$\frac{360}{300} = \frac{?}{100} \Rightarrow ? = 120$$

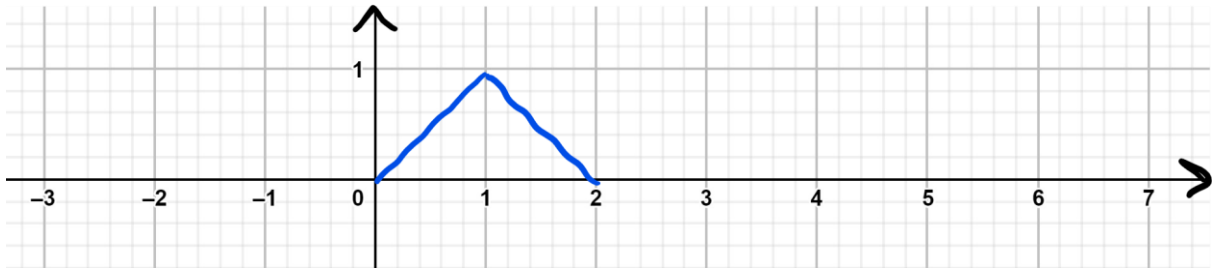
$$h = h_0 + r + r \sin \alpha$$

$$\alpha + 90 = 120 \Rightarrow \alpha = 30$$

$$\Rightarrow h =$$

## ۶-۲ دوره تناوب + تانژانت

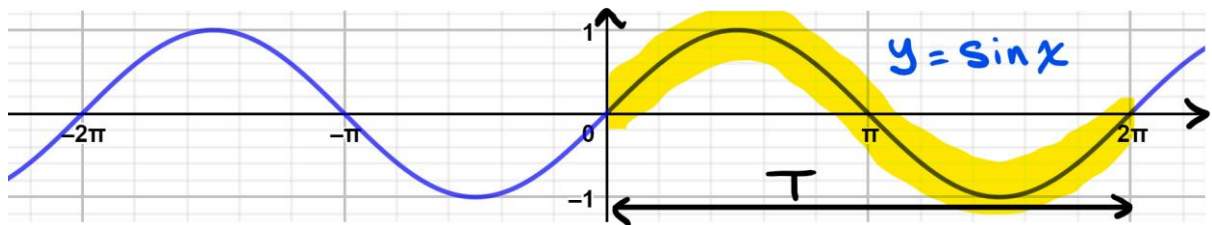
مفهوم یک تابع متناوب = تکرار شونده !!



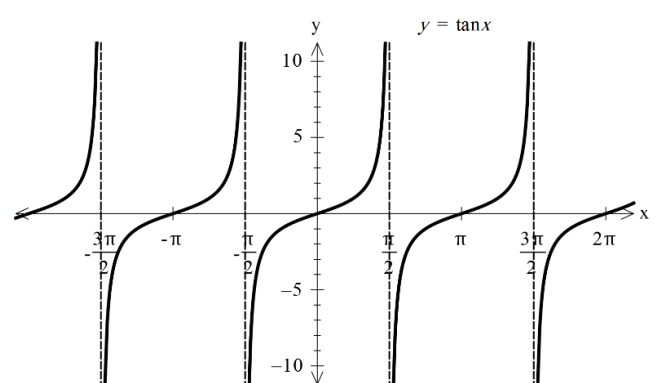
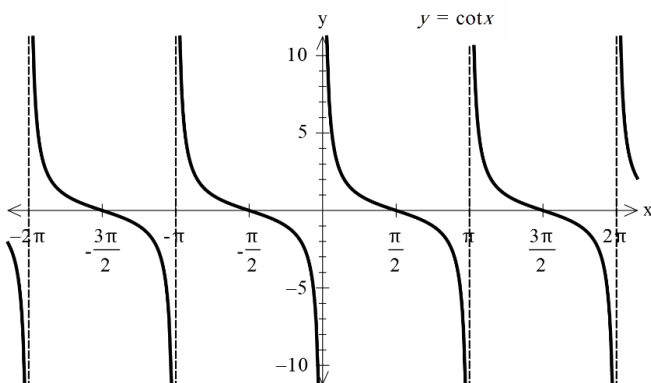
### تعریف ریاضی

تابع  $f$  را متناوب می نامیم هرگاه عدد حقیقی مثبت مانند  $T$  موجود باشد که برای هر  $x \in D_f$  داشته باشیم:  
 $x \pm T \in D_f$  ,  $f(x \pm T) = f(x)$   
 هر ضرب  $T$  هم دوره تناوب می باشد اما کوچکترین عدد مثبت با این خاصیت = دوره تناوب

توابع  $\sin x$  ,  $\cos x$  با دوره تناوب  $T = 2\pi$  و مفهوم انتقال جالب با فلش !

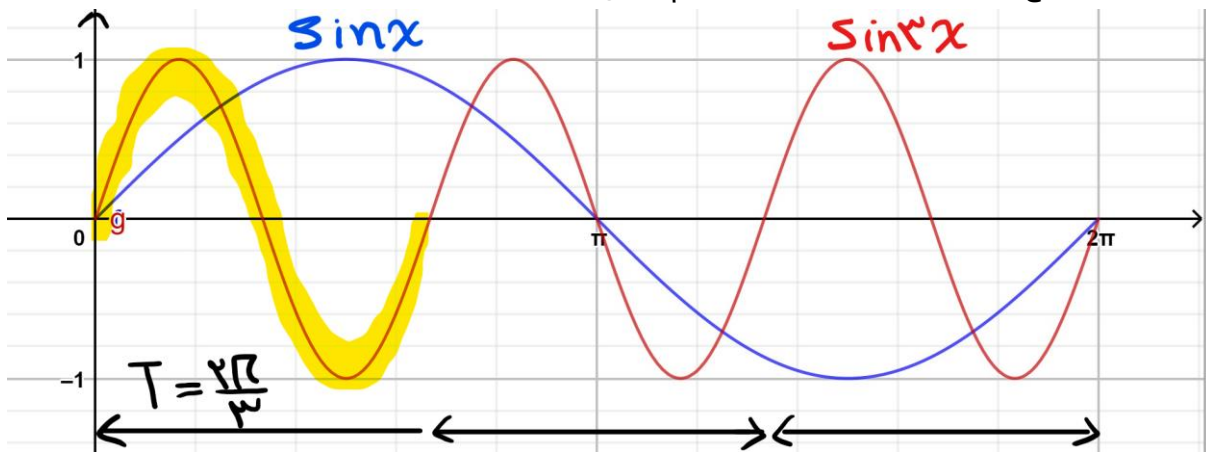


توابع  $\tan x$  ,  $\cot x$  با دوره تناوب  $T = \pi$  و مفهوم انتقال جالب با فلش !



### دوره تناوب و مقیاس طول (ایکس ضریبدار)

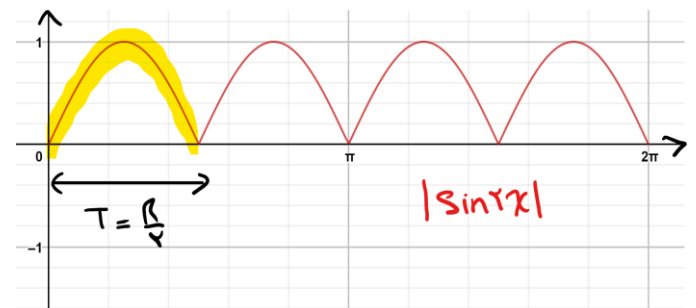
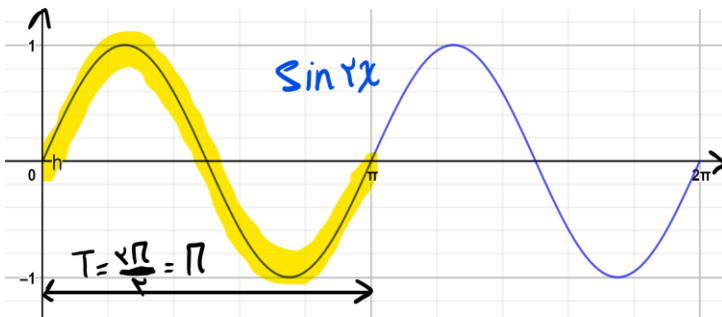
دوره تناوب تابع  $f(x) = \sin(3x)$  را با رسم شکل بدست آورید.



اگر یادتان باشد برای رسم همین کار را می‌کردیم یعنی اعداد محور طول را بر عدد داده شده تقسیم می‌کردیم

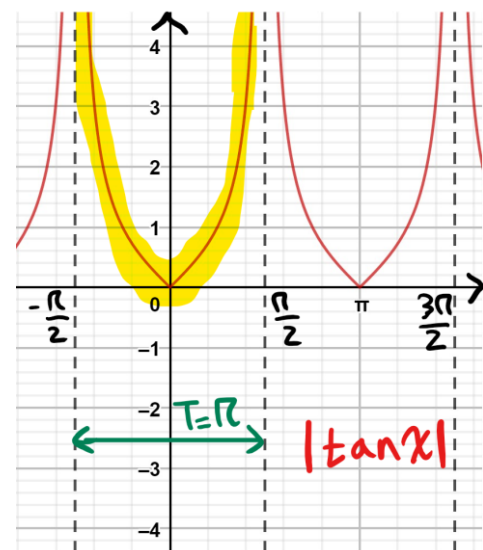
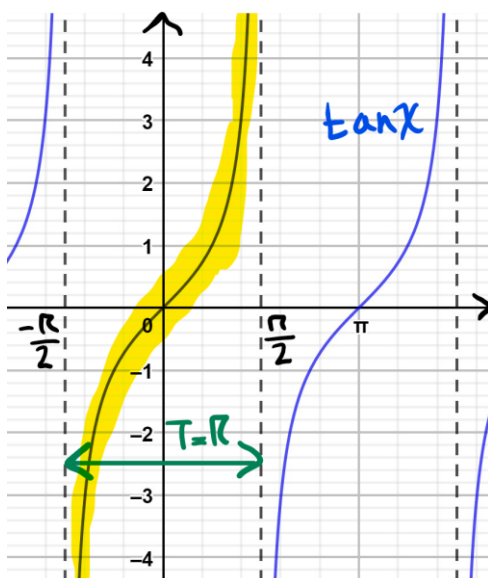
### سینوس و کسینوس و قدر مطلق

دوره تناوب تابع  $f(x) = |\sin(2x)|$  را با رسم شکل بدست آورید.



### تانژانت و کتانژانت و قدر مطلق

دوره تناوب تابع  $f(x) = |\tan x|$  را با رسم شکل بدست آورید.



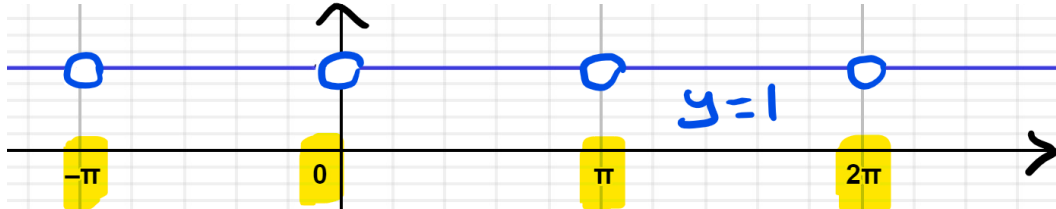
**تذکره ۴** توان زوج و قدر مطلق در توابع فرم سینوس و کسینوس موجب نصف شدن دوره تناوب می گردند ولی توابع فرم تانژانت و کتانژانت کمی در این زمینه پوست کلفت تشریف دارند!

**فرمول های پایه یازدهم**

$$\sin(ax+b), \cos(ax+b) \quad T = \frac{2\pi}{|a|}$$

$$\tan(ax+b), \cot(ax+b) \quad T = \frac{\pi}{|a|}$$

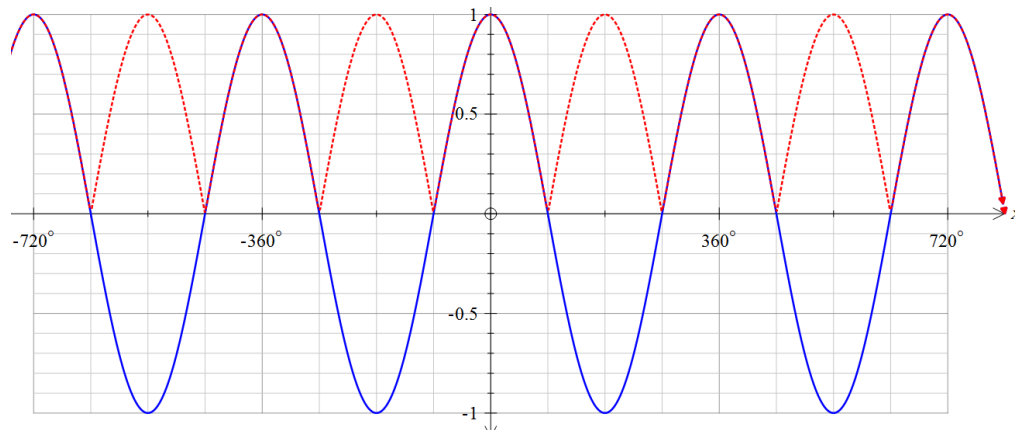
**مثال ۱۸** دوره تناوب تابع  $f(x) = \frac{\sin x}{\sin x}$  را بدست آورید.



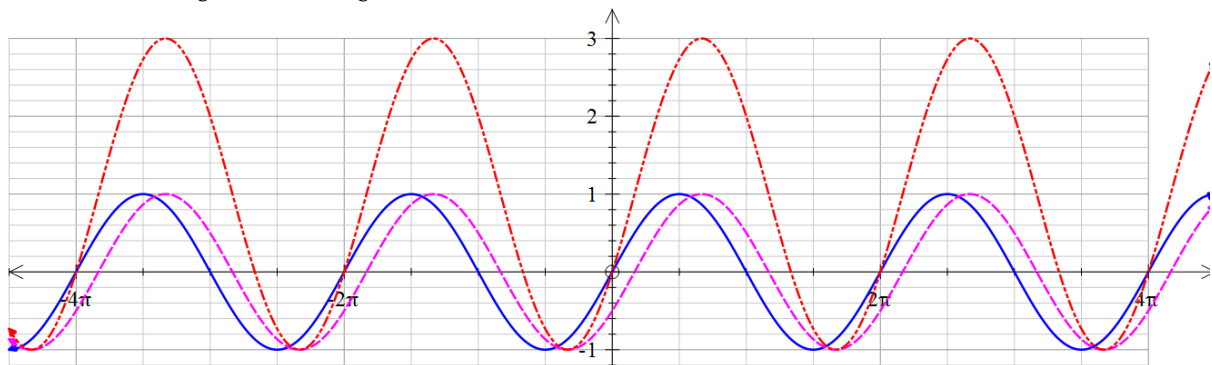
به این موضوع فکر کنید که اگر در شکل بالا حفره ای وجود نداشت یعنی در واقعا یک تابع ثابت با دامنه مجموعه اعداد حقیقی داشتیم تکلیف چه بود؟

**۳-۶ چند نمودار کتاب طوری!**

$$\cos(x), |\cos(x)|$$

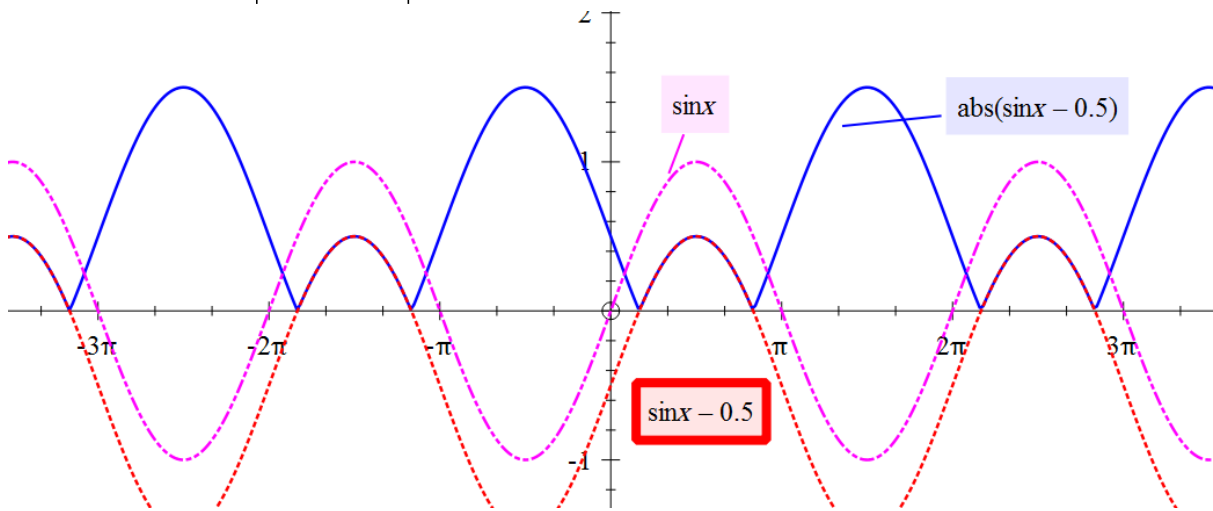


$$\sin(x), \sin(x - \frac{\pi}{6}), 2\sin(x - \frac{\pi}{6}) + 1$$

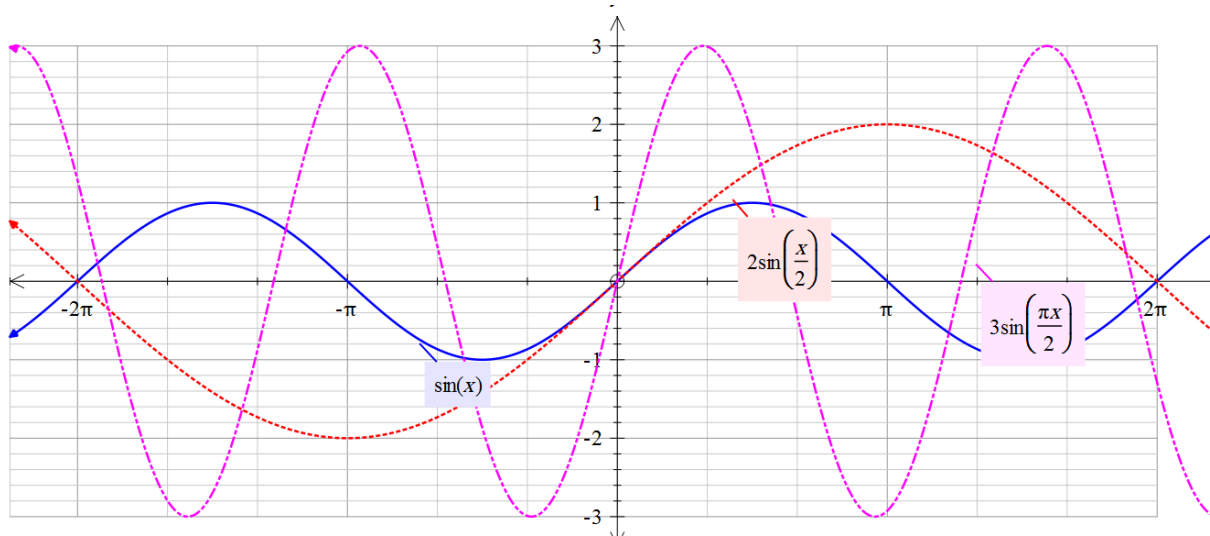


تمارین شما در منزل (سعی کنید خودتان رو کاغذ رسم کنید)

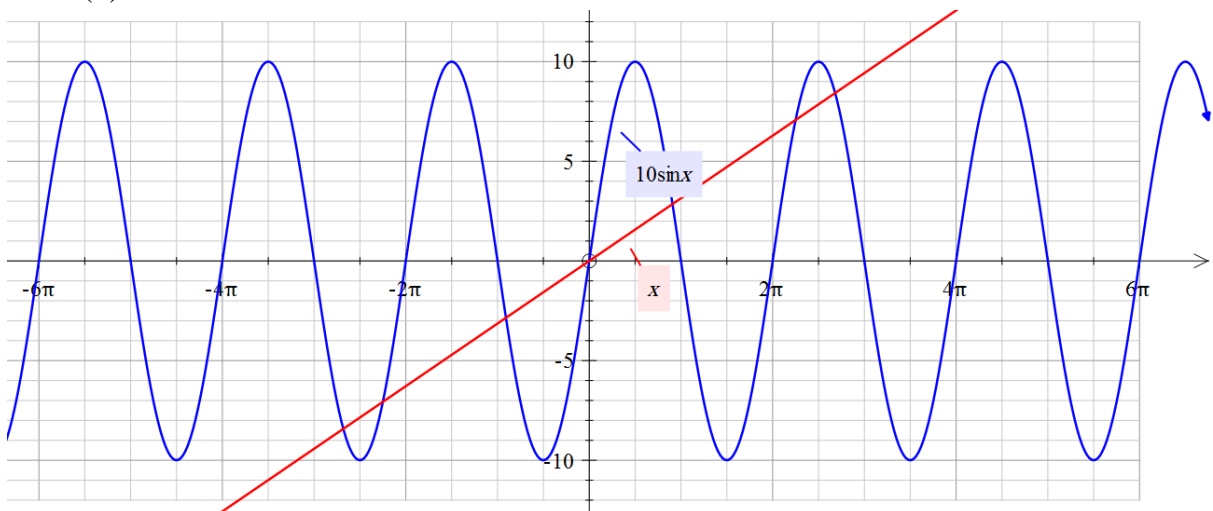
$\sin(x), \sin(x) - 0.5, |\sin(x) - 0.5|$



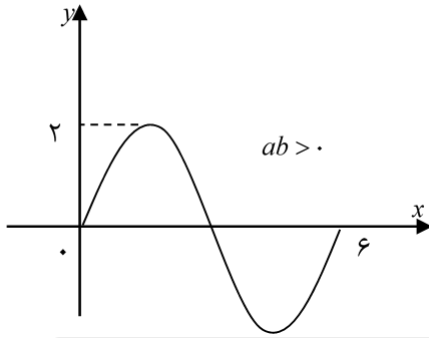
$\sin(x), 2\sin\left(\frac{x}{2}\right), 3\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)$



$10\sin(x) - x = 0$



۶-۴ و اما تیپ کنکوری



**مثال ۱۹** شکل روبه‌رو قسمتی از نمودار تابع  $y = a \sin(b\pi x)$  است.  $a+b$  کدام است؟

$$\frac{2\pi}{|b\pi|} = \frac{2}{|b|} = 6 \Rightarrow |b| = \frac{1}{3} \quad |a| = 2$$

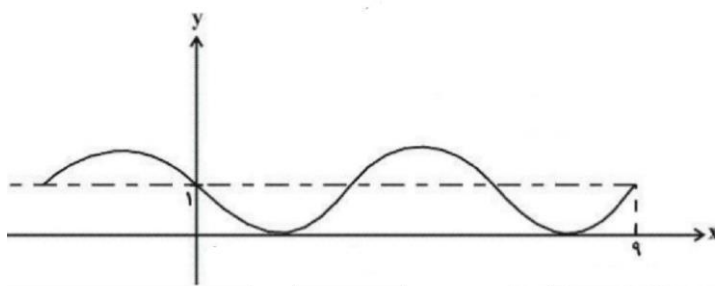
$$a = 2, b = \frac{1}{3} \quad a = -2, b = \frac{-1}{3}$$

تمرکز روی محور طول و تناوب : ضریب  $x$

تمرکز روی محور عرض و مینیمم و ماکسیمم و دقت به این حقیقت که:

$$-1 \leq \sin(\dots) \leq 1 \Rightarrow -|a| \leq a \sin(\dots) \leq |a|$$

موافق استاندارد یا خلاف استاندارد در تابع سینوس علامت پشت و جلو مهم است اما در تابع کسینوسی فقط پشت، سرنوشت ساز است چرا که کسینوس منفی جلوی خود را می‌بلعد!



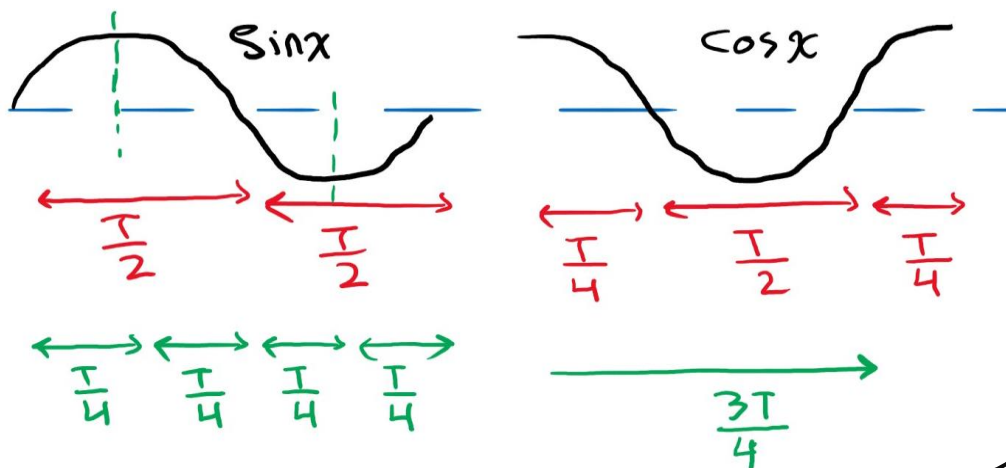
**مثال ۲۰** نمودار زیر مربوط به

$$f(x) = a + \cos\left(-\frac{1}{3} + bx\right)\pi$$

می‌باشد، حاصل  $f(29)$  کدام است؟

$$f(x) = a + \cos\left(-\frac{\pi}{3} + b\pi x\right) = a + \sin(b\pi x)$$

انتقال را زنده نگذارید !! + کالبد شکافی طاقی!!!



$$3 \frac{T}{2} = 9 \Rightarrow T = 6 \Rightarrow \frac{2\pi}{|b\pi|} = 6 \Rightarrow |b| = \frac{1}{3} \xrightarrow{*} b = \frac{-1}{3}$$

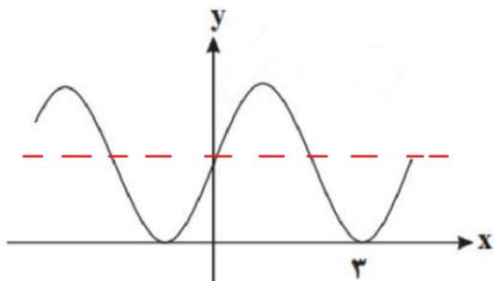
$$\min(f(x)) = 0 \Rightarrow a - 1 = 0 \Rightarrow a = 1$$

$$f(x) = 1 + \sin\left(-\frac{\pi}{3}x\right) = 1 - \sin\left(\frac{\pi}{3}x\right)$$

$$f(29) = 1 - \sin\left(\frac{29}{3}\pi\right) = 1 - \sin\left(\frac{30-1}{3}\pi\right) = 1 - \sin\left(10\pi - \frac{\pi}{3}\right) = 1 - \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) = 1 + \sin\frac{\pi}{3} = 1 + \frac{\sqrt{3}}{2}$$

دو تمرین برای شما در منزل

**مثال ۲۱** قسمتی از نمودار تابع  $f(x) = a + \sin(b\pi x)$  به صورت زیر است.  $a+b$  کدام است؟



$$-1 \leq \sin \leq 1 \Rightarrow a-1 \leq a+\sin \leq a+1 \quad \frac{1}{2} \quad (1)$$

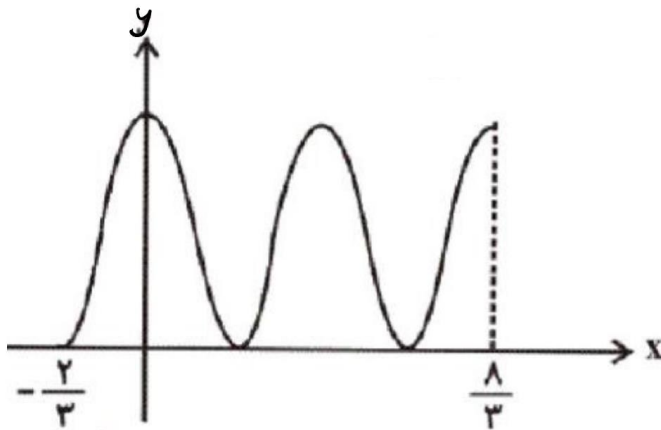
$$\text{Min} = 0 \Rightarrow a-1 = 0 \Rightarrow a = 1$$

$$\frac{3T}{4} = 3 \Rightarrow T = 4 \quad 1 \quad (2)$$

$$T = \frac{2\pi}{|b\pi|} = 4 \Rightarrow |b| = \frac{1}{2} \xrightarrow{b > 0} b = \frac{1}{2} \quad \frac{3}{2} \quad (3)$$

$$2 \quad (4)$$

**مثال ۲۲** شکل مقابل نمودار تابع  $f(x) = 3 + a \cos(b\pi x)$  است. حاصل  $(a+2b)$  برابر با کدام گزینه می‌تواند باشد؟



$$3 \quad (1)$$

$$-3 \quad (2)$$

$$-6 \quad (3)$$

$$6 \quad (4)$$

موارد بیشتر در متفرقه


**7 روابط مثلثاتی (قسمت دوم)**
**۱-۷ بسط‌های مثلثاتی**
**۱-۱-۷ بسط‌های اولیه / جمع و تفاضل کمان**

$$\sin(x \pm y) = \sin(x) \cos(y) \pm \sin(y) \cos(x)$$

$$\cos(x \pm y) = \cos(x) \cos(y) \mp \sin(y) \sin(x)$$

$$\tan(x \pm y) = \frac{\tan(x) \pm \tan(y)}{1 \mp \tan(x) \tan(y)}, \quad \cot(x \pm y) = \frac{\cot(x) \cot(y) \mp 1}{\cot(y) \pm \cot(x)}$$

اثبات در متفرقه ویژه رشته ریاضی

**مثال ۲۳** مقادیر زیر را محاسبه نمایید 

$$\sin(15) = \sin(45 - 30) = \sin 45 \cos 30 - \sin 30 \cos 45 = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$$

-----  
 $\cos(75)$   
 -----


$$\cot(165) = \frac{1}{\tan 165} \rightarrow \tan 165 = \tan(135 + 30) = \frac{\tan 135 + \tan 30}{1 - \tan 30 \tan 135} =$$

$$\frac{-1 + \frac{\sqrt{3}}{3}}{1 - \frac{\sqrt{3}}{3}(-1)} = \frac{-3 + \sqrt{3}}{3 + \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3} - 3}{\sqrt{3} + 3} \rightarrow \cot 165 = \frac{\sqrt{3} + 3}{\sqrt{3} - 3}$$

**مثال ۲۴** اگر  $\tan x, \tan y$  ریشه های معادله  $z^2 - 5z + 4 = 0$  باشند مطلوب است 

محاسبه نسبت مثلثاتی  $\tan(x + y)$  ؟

$$\tan(x + y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y} = \frac{\frac{-b}{a}}{1 - \frac{c}{a}} = \frac{5}{1 - 4} = \frac{-5}{3}$$

**مثال ۲۵** (تمرین) حاصل  $\frac{\sin(3a) \cos(a)}{\sin(a)} - \cos(3a)$  را ساده کنید. 

**۷-۲ نسبت‌ها چند برابر کمان**
**۷-۲-۱ فرمول‌های دو برابر**

$$\sin(2x) = 2 \sin(x) \cos(x) \Rightarrow \sin(\square) \cos(\square) = \frac{1}{2} \sin(2\square) \quad , \quad \sin(6x) = 2 \sin(3x) \cos(3x)$$

$$\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x) = 2 \cos^2(x) - 1 = 1 - 2 \sin^2(x)$$

$$\tan(2x) = \frac{2 \tan(x)}{1 - \tan^2(x)} \quad , \quad \cot(2x) = \frac{\cot^2(x) - 1}{2 \cot(x)}$$

## اثبات

$$\sin(2x) = \sin(x + x) = \sin x \cos x + \cos x \sin x = 2 \sin x \cos x$$

$$\cos(2x) = \cos(x + x) = \cos x \cos x - \sin x \sin x = \cos^2 x - \sin^2 x$$

$$\cos^2 x - \sin^2 x = (1 - \sin^2 x) - \sin^2 x = 1 - 2 \sin^2 x$$

$$\tan(2x) = \tan(x + x) = \frac{\tan x + \tan x}{1 - \tan x \tan x} = \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x}$$

**مثال ۲۶** مقدار  $\frac{\sin 72}{\sin 24} - \frac{\cos 72}{\cos 24}$  چقدر است؟

$$\frac{\sin 72}{\sin 24} - \frac{\cos 72}{\cos 24} = \frac{\sin 72 \cos 24 - \sin 24 \cos 72}{\sin 24 \cos 24} = \frac{\sin(72 - 24)}{\sin 24 \cos 24} = \frac{\sin 48}{\sin 24 \cos 24} = \frac{2 \sin 24 \cos 24}{\sin 24 \cos 24} = 2$$

**مثال ۲۷** مقدار  $\frac{1}{\sin^2 15} - \frac{1}{\cos^2 15}$  چقدر است؟

$$\frac{1}{\sin^2 15} - \frac{1}{\cos^2 15} = \frac{\cos^2 15 - \sin^2 15}{(\sin 15 \cos 15)^2} = \frac{\cos 30}{\left(\frac{1}{2} \sin 30\right)^2} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{16}} = 8\sqrt{3}$$

**۷-۲-۲ نتایج مهم (روابط طلایی)**

$$1. \sin^2(x) = \frac{1 - \cos(2x)}{2} \quad \rightarrow \frac{1 - \cos(2x)}{2} = \frac{1 - (1 - 2 \sin^2 x)}{2} = \frac{2 \sin^2 x}{2} = \sin^2 x$$


$$2. \cos^2(x) = \frac{1 + \cos(2x)}{2} \quad \rightarrow \frac{1 + \cos(2x)}{2} = \frac{1 + (2 \cos^2 x - 1)}{2} = \frac{2 \cos^2 x}{2} = \cos^2 x$$

$$1 - \cos 2x = 2 \sin^2 x \quad , \quad 1 + \cos 2x = 2 \cos^2 x$$

$$3. \tan^2(x) = \frac{1 - \cos(2x)}{1 + \cos(2x)} \quad \rightarrow \tan^2 x = \frac{2 \sin^2 x}{2 \cos^2 x} = \frac{1 - \cos 2x}{1 + \cos 2x} \quad \rightarrow \cot^2(x) = \frac{1 + \cos(2x)}{1 - \cos(2x)}$$

فقط سبزها : **بسه دیگه چقدر ۲ ، نصف کمان** بلندتر بگو!

**مثال ۲۸ (تمرین)** نشان دهید  $\sin(18)\cos(36) = 0.25$  

**مثال ۲۹** ثابت کنید  $\cos 20\cos 40\cos 80 = \frac{1}{8}$  

$$A = \cos 20\cos 40\cos 80 \rightarrow \times \sin 20$$

$$A \sin 20 = (\sin 20 \cos 20) \cos 40 \cos 80 = \frac{1}{2} (\sin 40 \cos 40) \cos 80$$

$$A \sin 20 = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \sin 80 \cos 80 = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \sin 160$$

$$A \sin 20 = \frac{1}{8} \sin(180 - 20) \rightarrow A \sin 20 = \frac{1}{8} \sin 20 \rightarrow A = \frac{1}{8}$$

**تذکر (۵)** اگر زاویه‌ها تشکیل دنباله هندسی با قدر نسبت ۲ دادند حواست جمع باشد! 

۷-۲-۳ اتحادهای دو برابر

0.  $(\sin(x) \pm \cos(x))^2 = 1 \pm \sin(2x)$  ,  $(\sin x + \cos x)^2 = \sin^2 x + \cos^2 x + 2 \sin x \cos x$

1.  $\sin^4 x + \cos^4 x = 1 - \frac{1}{2} \sin^2(2x)$  ,  $(\sin^2 2x = 4 \sin^2 x \cos^2 x)$

2.  $\sin^6 x + \cos^6 x = 1 - \frac{3}{4} \sin^2(2x)$

3.  $\cos^4 x - \sin^4 x = \cos(2x)$


$$\cos^4 x - \sin^4 x = (\cos^2 x - \sin^2 x)(\cos^2 x + \sin^2 x) = \cos^2 x - \sin^2 x = \cos 2x$$

4.  $\tan(x) + \cot(x) = \frac{2}{\sin(2x)}$

$$\frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin x \cos x} = \frac{1}{\sin x \cos x} = \frac{2}{2 \sin x \cos x} = \frac{2}{\sin 2x}$$

5.  $\cot(x) - \tan(x) = 2 \cot(2x)$  ,

$$\frac{\cos x}{\sin x} - \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\sin x \cos x} = \frac{\cos 2x}{\frac{1}{2} \sin 2x} = 2 \cot 2x$$

**مثال ۳۰** اگر  $\sin(x) + \cos(x) = \frac{1}{5}$  باشد، مقدار  $\sin(2x)$  چقدر است؟ 

## ۷-۲-۴ مثال های دو برابر

**مثال ۳۱** اگر  $\cos(x) = \frac{1}{3}$  باشد، حاصل  $\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)$  را بدست آورید

$$I) \tan^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1 - \cos x}{1 + \cos x} = \frac{1 - \frac{1}{3}}{1 + \frac{1}{3}} = \frac{\frac{2}{3}}{\frac{4}{3}} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$II) \cos x = 2 \cos^2 \frac{x}{2} - 1 = \frac{1}{3} \Rightarrow \cos^2 \frac{x}{2} = \frac{2}{3} \Rightarrow \sin^2 \frac{x}{2} = \frac{1}{3} \Rightarrow \tan^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{\sin^2 \frac{x}{2}}{\cos^2 \frac{x}{2}} = \frac{1}{2}$$

**مثال ۳۲** موارد زیر را محاسبه کنید

$$1 - \sin\left(\frac{\pi}{12}\right) \left( \sin^4\left(\frac{\pi}{24}\right) - \cos^4\left(\frac{\pi}{24}\right) \right) = ? = \sin \frac{\pi}{12} (-\cos 2 \frac{\pi}{24}) = -\sin \frac{\pi}{12} \cos \frac{\pi}{12} = -\frac{1}{2} \sin \frac{\pi}{6} = -\frac{1}{4}$$

$$2 - \sin^6\left(\frac{\pi}{12}\right) + \cos^6\left(\frac{\pi}{12}\right) = ? = 1 - \frac{3}{4} \sin^2\left(2 \frac{\pi}{12}\right) = 1 - \frac{3}{4} \sin^2 \frac{\pi}{6} = 1 - \frac{3}{16} = \frac{13}{16}$$

**مثال ۳۳** اگر  $\tan(x) + \cot(x) = 4$  باشد، حاصل  $\sin(2x)$  را بدست آورید

$$\tan(x) + \cot(x) = \frac{2}{\sin 2x} = 4 \rightarrow \sin 2x = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

**مثال ۳۴** اگر  $\sin(2x) = \frac{3}{5}$  باشد، حاصل  $\tan^2(x) + \cot^2(x)$  را بدست آورید

$$\tan^2(x) + \cot^2(x) = (\tan(x) + \cot(x))^2 - 2 \tan(x) \cot(x) = (\tan(x) + \cot(x))^2 - 2$$

$$\tan(x) + \cot(x) = \frac{2}{\sin 2x} = \frac{10}{3} \rightarrow \tan^2(x) + \cot^2(x) = \left(\frac{10}{3}\right)^2 - 2 = \frac{82}{9}$$

**مثال ۳۵** حاصل عبارت  $\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$  را ساده کنید.

$$I. \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) =$$

$$\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \sin\left(\frac{\pi}{2} + \left(x - \frac{\pi}{4}\right)\right) = \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2} \sin 2\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2} \sin\left(2x + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2} \cos(2x)$$

$$II. (R) \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \cos^2 \frac{\pi}{4} - \sin^2 x = \frac{1}{2} - \sin^2 x = \frac{1 - 2 \sin^2 x}{2} = \frac{\cos(2x)}{2}$$

**مثال ۳۶** اگر  $\tan(x) - \cot(x) = 10$  باشد، حاصل  $\cot(4x)$  را بدست آورید

**مثال ۳۷** حاصل عبارت  $\tan 20 + 2 \tan 40 + 4 \cot 80$  را ساده کنید

### ۷-۲-۵ روابط نصف کمان

$$1. \sin(x) = \frac{2 \tan(\frac{x}{2})}{1 + \tan^2(\frac{x}{2})}, \quad 2. \cos(x) = \frac{1 - \tan^2(\frac{x}{2})}{1 + \tan^2(\frac{x}{2})}$$

$$3. \tan(\frac{x}{2}) = \frac{\sin(x)}{1 + \cos(x)}, \quad \cot(\frac{x}{2}) = \frac{1 + \cos(x)}{\sin(x)}$$

اثبات:

$$\frac{2 \tan(\frac{x}{2})}{1 + \tan^2(\frac{x}{2})} = \frac{2 \tan(\frac{x}{2})}{\frac{1}{\cos^2(\frac{x}{2})}} = 2 \frac{\sin \frac{x}{2}}{\cos \frac{x}{2}} \cos^2 \frac{x}{2} = 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} = \sin x$$

$$\frac{\sin(x)}{1 + \cos(x)} = \frac{2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}}{2 \cos^2 \frac{x}{2}} = \frac{\sin \frac{x}{2}}{\cos \frac{x}{2}} = \tan \frac{x}{2}$$

اگر  $\frac{\tan(x)(1 - \tan^2(x))}{(1 + \tan^2(x))^2} = \frac{1}{8}$  باشد، حاصل  $\sin(4x)$  را بدست آورید

**مثال ۳۸**

$$\frac{\tan(x)(1 - \tan^2(x))}{(1 + \tan^2(x))^2} = \frac{1}{8} \rightarrow \times 2 : \frac{2 \tan(x)}{1 + \tan^2(x)} \times \frac{1 - \tan^2(x)}{1 + \tan^2(x)} = \frac{1}{4}$$

$$\sin(2x) \cos(2x) = \frac{1}{4} \rightarrow \frac{1}{2} \sin(4x) = \frac{1}{4} \rightarrow \sin(4x) = \frac{1}{2}$$

۷-۳ تمرین بیشتر روابط

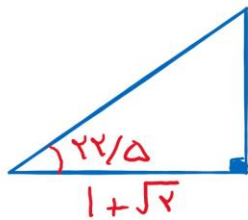
محاسبه نسبت های مثلثاتی ۲۲/۵ درجه - ۶۷/۵ درجه

$$2 \sin^2\left(\frac{\pi}{8}\right) = 1 - \cos \frac{\pi}{4} \Rightarrow \sin\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \cos\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{2}}{2}$$

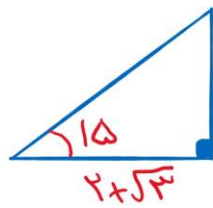
محاسبه نسبت های مثلثاتی ۱۵ درجه - ۷۵ درجه

$$2 \sin^2\left(\frac{\pi}{12}\right) = 1 - \cos \frac{\pi}{6} \Rightarrow \sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{2}$$

اگر تانژانت بخواید، یک راهش :



$$\tan 22.5 = \frac{1}{1+\sqrt{2}} = \sqrt{2}-1$$



$$\tan 15 = \frac{1}{2+\sqrt{3}} = 2-\sqrt{3}$$

مثلث قائم الزاویه طلایی [3,4,5] + اعداد معروف فیثاغورسی [8,15,17] + [5,12,13]  
رسم مثلث قائم الزاویه ایده بینظیر است! بفرمایید خواهش می کنم: مثال بعدی

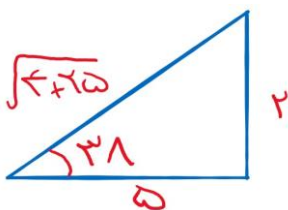
**مثال ۳۹** ؟ اگر  $\tan 38 = \frac{2}{5}$  باشد، حاصل  $\cos^2 52 - \sin^2 52$  را بدست آورید

حل فرمولی و بی دزد

$$\cos^2 52 - \sin^2 52 = \cos 104 = -\cos 76 = -\cos(2 \times 38) = -\frac{21}{29}$$

$$-\cos(2 \times 38) = -\frac{1 - \tan^2 38}{1 + \tan^2 38} = -\frac{21}{29}$$

حل حرفه ای! جارو ها رو بیارید لطفا



$$\cos^2 52 - \sin^2 52 = \cos 104 = -\cos 76 = -\cos(2 \times 38)$$

$$-\cos(2 \times 38) = 1 - 2\cos^2 38 = 1 - 2\left(\frac{5}{\sqrt{29}}\right)^2 = \frac{-21}{29}$$

**مثال ۴۰** ؟ حاصل  $\sin 15 + \sin 75$  را بدست آورید.

متمم + توان ۲ !!

## 8 متفرقه

### ۸-۱ چند مهارت پایه‌ای

توان ۲ رساندن

$$\begin{aligned} 1 < x < 2 &\xrightarrow{\wedge r} 1 < x^r < 4 \\ -3 < x < -2 &\xrightarrow{\wedge r} 4 < x^r < 9 \\ -1 < x < 4 &\xrightarrow{\wedge r} 0 \leq x^r < 16 \\ -3 < x < 2 &\xrightarrow{\wedge r} 0 \leq x^r < 9 \end{aligned}$$

معکوس کردن

$$\begin{aligned} 2 < x < 3 &\xrightarrow{\wedge -1} \frac{1}{3} < \frac{1}{x} < \frac{1}{2} \\ -3 < x < -2 &\xrightarrow{\wedge -1} -\frac{1}{2} < \frac{1}{x} < -\frac{1}{3} \\ -2 < x < 7 &\xrightarrow{\wedge -1} -\infty < \frac{1}{x} < -\frac{1}{2} \quad \text{or} \quad \frac{1}{7} < \frac{1}{x} < +\infty \end{aligned}$$

شبهه سازی: تعیین حدود  $y = \frac{3 \cos x}{3 \cos x - 1}$

$$y = \frac{3 \cos x - 1 + 1}{3 \cos x - 1} = \frac{(3 \cos x - 1) + 1}{3 \cos x - 1} \quad \frac{A+B}{C} = \frac{A}{C} + \frac{B}{C}$$

$$y = 1 + \frac{1}{3 \cos x - 1} \Rightarrow -1 \leq \cos x \leq +1 \xrightarrow{\times r} -3 \leq 3 \cos x \leq 3 \xrightarrow{-1} -2 \leq 3 \cos x - 1 \leq 2$$

$$-2 \leq 3 \cos x - 1 \leq 2 \xrightarrow{\wedge -1} -\infty < \frac{1}{3 \cos x - 1} \leq -\frac{1}{2} \quad \text{or} \quad \frac{1}{4} \leq \frac{1}{3 \cos x - 1} < +\infty$$

$$\xrightarrow{+1} -\infty < 1 + \frac{1}{3 \cos x - 1} \leq \frac{3}{4} \quad \text{or} \quad \frac{3}{2} \leq 1 + \frac{1}{3 \cos x - 1} < +\infty$$

$$y \in (-\infty, \frac{3}{4}] \cup [\frac{3}{2}, +\infty)$$

تغییر متغیر + مربع کامل کردن

$$A = \sqrt{\sin x} - \sin x \rightarrow \sqrt{\sin x} = t \rightarrow 0 \leq t \leq 1$$

$$A = t - t^2 \rightarrow -A = t^2 - t \xrightarrow{\left(\frac{-1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}} \frac{1}{4} - A = t^2 - t + \frac{1}{4}$$

$$\rightarrow \frac{1}{4} - A = \left(t - \frac{1}{2}\right)^2 \rightarrow -A = \left(t - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} \rightarrow A = \frac{1}{4} - \left(t - \frac{1}{2}\right)^2$$

$$\rightarrow 0 \leq t \leq 1 \xrightarrow{-\frac{1}{2}} -\frac{1}{2} \leq t - \frac{1}{2} \leq \frac{1}{2} \xrightarrow{\wedge r} 0 \leq \left(t - \frac{1}{2}\right)^2 \leq \frac{1}{4} \xrightarrow{\times(-1)} -\frac{1}{4} \leq -\left(t - \frac{1}{2}\right)^2 \leq 0$$

$$\xrightarrow{+\frac{1}{4}} 0 \leq \frac{1}{4} - \left(t - \frac{1}{2}\right)^2 \leq \frac{1}{4} \Rightarrow A \in \left[\frac{1}{4}, 0\right]$$

می توانستید شکل سهمی را رسم کنید

## ۸-۲ از تبدیل کمان

مثال:  $\tan(15) = 0.28 \rightarrow \frac{\cos(285) - \sin(255)}{\sin(525) - \sin(105)} = ?$

$$\frac{\cos(\frac{3\pi}{2} + 15) - \sin(\frac{3\pi}{2} - 15)}{\sin(3\pi - 15) - \sin(\frac{\pi}{2} + 15)} = \frac{\sin 15 + \cos 15}{\sin 15 - \cos 15} \rightarrow \div \cos 15 \Rightarrow \frac{\tan 15 + 1}{\tan 15 - 1} = \frac{1.28}{0.72}$$

$$1. \sin(\frac{3\pi}{2} - x) = \sin(\frac{3\pi}{2} - x) = \sin(\frac{3\pi}{2} - x) = \sin(1.5\pi - x) = -\cos x$$

سینوس در ناحیه ۳ منفی است      تبدیل برادرها      می‌توان حذف کرد

$$2. \sin(-\frac{\pi}{2} + x) = \sin(-\frac{\pi}{2} + \frac{4\pi}{2} + x) = \sin(\frac{3\pi}{2} + x) = -\cos x$$

سینوس در ناحیه ۴ منفی است      مضارب زوج  $\pi$  را به راحتی کم و زیاد می‌کنیم

$$3. \cos(\frac{3\pi}{2} - x) = -\sin x$$

کسینوس در ناحیه ۳      تبدیل برادرها      منفی است

$$4. \tan(-\frac{9\pi}{2} + x) = \tan(-\frac{9\pi}{2} + \frac{12\pi}{2} + x) = \tan(\frac{3\pi}{2} + x) = -\cot x$$

تانژانت در ناحیه ۴      تبدیل برادرها      مضارب زوج  $\pi$  را کم و زیاد می‌کنیم      منفی است

$$5. \cot(-\frac{5\pi}{2} - x) = \cot(-\frac{5\pi}{2} + \frac{8\pi}{2} - x) = \cot(\frac{3\pi}{2} - x) = \tan x$$

کوتانژانت در ناحیه      تبدیل برادرها      مضارب زوج  $\pi$  را کم و زیاد می‌کنیم      ۳ مثبت است

$$6. \tan(-\frac{7\pi}{2} + x) = \tan(-\frac{7\pi}{2} + \frac{8\pi}{2} + x) = \tan(\frac{\pi}{2} + x) = -\cot x$$

تانژانت در ناحیه ۲      تبدیل برادرها      مضارب زوج  $\pi$  را کم و زیاد می‌کنیم      منفی است

$$7. \cot(\frac{32\pi}{2} - x) = \cot(\frac{32\pi}{2} - \frac{32\pi}{2} - x) = \cot(\frac{\pi}{2} - x) = \tan x$$

کوتانژانت در ناحیه      تبدیل برادرها      مضارب زوج  $\pi$  را کم و زیاد می‌کنیم      ۱ مثبت است

$$8. \cos(\frac{7\pi}{2} - \frac{\pi}{4}) = \cos(\frac{14\pi}{4} - \frac{\pi}{4}) = \cos(\frac{13\pi}{4}) = \cos(\frac{13\pi}{4} - \frac{8\pi}{4}) = \cos(\frac{5\pi}{4}) = \cos(\pi + \frac{\pi}{4}) = -\cos(\frac{\pi}{4}) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

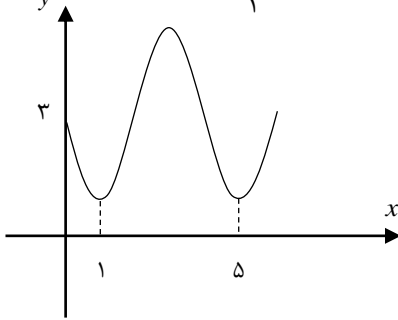
مضارب  $\pi$  نسبت را عوض نمی‌کند      مضارب زوج  $\pi$  را کم و زیاد می‌کنیم      کسینوس در ناحیه ۳ منفی است

$$9. \tan(\frac{71\pi}{2} + \frac{\pi}{4}) = \tan(\frac{71\pi}{2} - \frac{68\pi}{2} + \frac{\pi}{4}) = \tan(\frac{3\pi}{2} + \frac{\pi}{4}) = -\cot \frac{\pi}{4} = -\cot 45 = -1$$

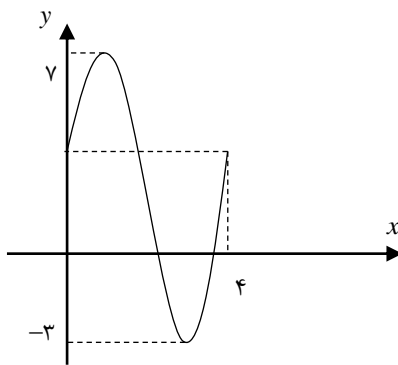
تانژانت در ناحیه ۴      تبدیل برادرها      مضارب زوج  $\pi$  را کم و زیاد می‌کنیم      منفی است

### ۸-۳ نمودارها

۱- شکل روبه‌رو قسمتی از تابع  $y = a + \sin(b\pi x)$  می‌باشد. مقدار تابع را در نقطه  $x = \frac{25}{3}$  محاسبه نمایید.



۲- شکل رو به‌رو قسمتی از تابع  $y = a \sin(bx) + c, (a, b > 0)$  می‌باشد. مقادیر مجهول را محاسبه نمایید.



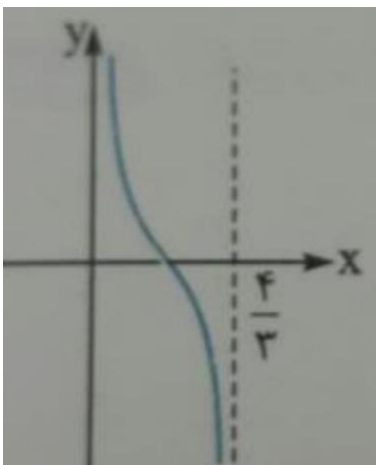
$$\frac{2\pi}{|b|} = 4 \rightarrow \frac{2\pi}{4} = b \rightarrow b = \frac{\pi}{2}$$

$$-1 \leq \sin(bx) \leq 1$$

$$-a \leq a \sin(bx) \leq a \rightarrow c - a \leq y \leq c + a$$

$$\begin{cases} a + c = 7 \\ c - a = -3 \end{cases} \Rightarrow 2c = 4 \rightarrow c = 2, a = 5$$

۳- شکل روبه‌رو قسمتی از تابع  $y = \tan(\pi(ax + \frac{1}{4}))$  می‌باشد. مقدار مجهول را محاسبه نمایید.

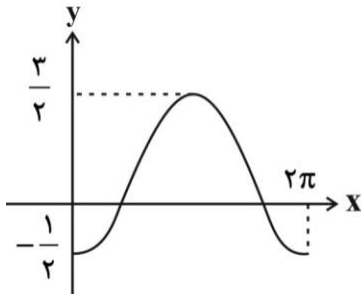


$$y = \tan(\pi ax + \frac{\pi}{4}) = -\cot(\pi ax)$$

$$\frac{\pi}{|\pi a|} = \frac{4}{3} \rightarrow a = \pm \frac{3}{4} \rightarrow \begin{cases} a > 0 \approx -\cot \text{ No} \\ a < 0 \approx \cot \text{ yes} \end{cases}$$

### ۸-۴ دو سوال خوب از توابع مثلثاتی - قلمچی

۱- شکل زیر مربوط به قسمتی از نمودار تابع  $y = a \cos x + b$  است. مقدار  $a - 2b$  کدام است؟



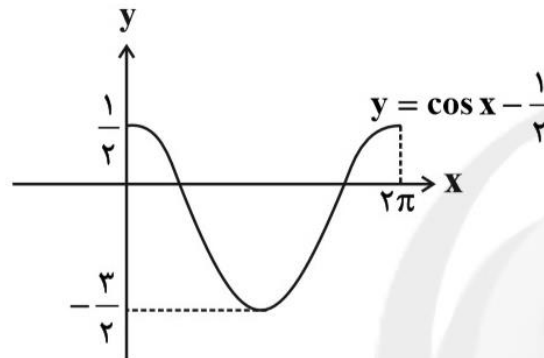
(۱) ۲

(۲) -۲

(۳)  $\frac{5}{2}$

(۴)  $-\frac{5}{2}$

در کتاب درسی نمودار مربوط به تابع  $y = \cos x - \frac{1}{2}$  به صورت زیر رسم شده است.



اگر کمی دقت کنید نمودار داده شده قرینه همین نمودار نسبت به محور

$x$ ها است. پس ضابطه آن به صورت  $y = \frac{1}{2} - \cos x$  می شود.

روش دوم: مقدار تابع در  $x = 0$  برابر  $-\frac{1}{2}$  است. در نتیجه:

$$y = a \cos x + b \xrightarrow{x=0} a(1) + b = -\frac{1}{2} \Rightarrow a + b = -\frac{1}{2}$$

به علاوه در  $x = \pi$  مقدار تابع برابر  $\frac{3}{2}$  می شود. در نتیجه:

$$\xrightarrow{x=\pi} a(-1) + b = \frac{3}{2} \Rightarrow -a + b = \frac{3}{2}$$

با حل دستگاه، مقادیر  $a$  و  $b$  را پیدا می کنیم:

$$\begin{cases} a + b = -\frac{1}{2} \\ -a + b = \frac{3}{2} \end{cases} \Rightarrow b = \frac{1}{2}, a = -1 \Rightarrow a - 2b = -1 - 2 \times \left(\frac{1}{2}\right) = -2$$

۲- کدام گزینه در مورد تابع  $f(x) = \sin(x - \frac{3\pi}{4}) - 2\cos(\frac{\sqrt{\pi}}{4} + x)$  با دامنه  $[-\frac{\pi}{4}, 2\pi]$ ، نادرست است؟

(۱) نمودار، ۳ بار محور  $x$  ها را قطع می کند.

(۲) اختلاف بیشترین و کمترین مقدار  $f$  برابر ۶ است.

(۳) نمودار  $f$  در بازه  $(\frac{\pi}{4}, \pi)$  بالای محور  $x$  ها قرار دارد.

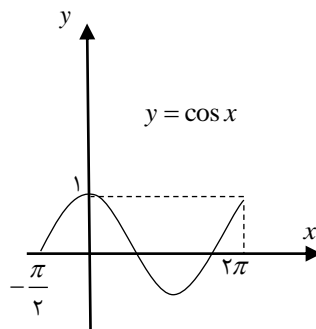
(۴) خط  $y = -1$  در دو نقطه نمودار را قطع می کند.

$$f(x) = \sin(x - \frac{3\pi}{4}) - 2\cos(\frac{\sqrt{\pi}}{4} + x)$$

$$\Rightarrow f(x) = -\sin(\frac{3\pi}{4} - x) - 2\cos(\frac{\sqrt{\pi}}{4} + x)$$

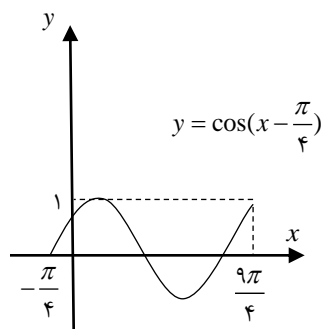
$$\Rightarrow f(x) = -\sin(\frac{\pi}{2} - (x - \frac{\pi}{4})) - 2\cos(2\pi + (x - \frac{\pi}{4}))$$

$$\Rightarrow f(x) = -\cos(x - \frac{\pi}{4}) - 2\cos(x - \frac{\pi}{4}) = -3\cos(x - \frac{\pi}{4})$$



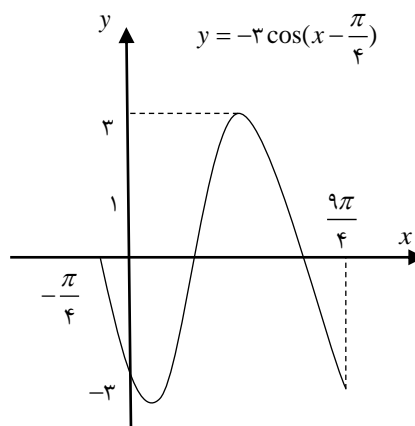
حال تابع را مرحله به مرحله رسم می کنیم:

به راست  $\frac{\pi}{4}$



در راستای محور  $y$  ها،

۳ برابر و قرینه می شود



با توجه به نمودار گزینه های (۱) و (۳) درست است.

همچنین بیشترین مقدار تابع ۳ و کمترین مقدار آن -۳ است که اختلافشان ۶ می شود. پس گزینه (۲) نیز درست است.

### ۵-۸ ۱۰ تست بیشتر از روابط مثلثاتی مشترک دو رشته

۱- تست: حاصل عبارت  $\frac{\tan 75^\circ}{1 + \tan^2 75^\circ}$  کدام است؟

$\frac{1}{4}$  (۱)       $\frac{\sqrt{3}}{4}$  (۲)       $-\frac{1}{4}$  (۳)       $-\frac{\sqrt{3}}{4}$  (۴)

پاسخ:

$$\frac{\tan 75^\circ}{1 + \tan^2 75^\circ} \xrightarrow{1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}} \frac{\tan 75^\circ}{\frac{1}{\cos^2 75^\circ}} \rightarrow \frac{\sin 75^\circ}{\cos 75^\circ} \cdot \frac{\cos^2 75^\circ}{1} \rightarrow \frac{\sin 75^\circ \cos^2 75^\circ}{\cos 75^\circ}$$

$$\rightarrow \sin 75^\circ \cos 75^\circ \xrightarrow{\sin 2\alpha} \frac{1}{2} \sin 150^\circ = \frac{1}{2} \sin(180^\circ - 30^\circ) = \frac{1}{2} \sin 30^\circ = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

۲- تست: اگر  $a + b = \frac{\pi}{4}$  باشد، حاصل  $\lambda \cos a \cos b \cos(\frac{\pi}{2} - a) \cos(\frac{\pi}{2} - b)$  کدام است؟

$\sin 4a$  (۱)       $\cos 4a$  (۲)       $\sin^2 2a$  (۳)       $\cos^2 2a$  (۴)

پاسخ:

$$\lambda \cos a \cos b \cos(\frac{\pi}{2} - a) \cos(\frac{\pi}{2} - b) \rightarrow \lambda \cos a \cos b \sin a \sin b \rightarrow \lambda (\sin a \cos a) (\sin b \cos b)$$

$$\xrightarrow{\sin 2\alpha} \lambda \times \frac{1}{2} \sin 2a \times \frac{1}{2} \sin 2b = \frac{\lambda}{4} \sin 2a \sin 2b \xrightarrow{a+b=\frac{\pi}{4} \Rightarrow b=\frac{\pi}{4}-a} \frac{\lambda}{4} \sin 2a \sin(\frac{\pi}{2} - 2a)$$

$$\rightarrow \frac{\lambda}{4} \sin 2a \cos 2a \xrightarrow{\sin 2\alpha} \frac{\lambda}{8} \sin 4a$$

۳- تست: اگر  $\sin 4x = \frac{1}{4}$  باشد، حاصل  $(\sin 2x - \cos 2x)^2$  کدام است؟

$\frac{3}{4}$  (۴)       $\frac{1}{2}$  (۳)       $\frac{5}{4}$  (۲)       $\frac{3}{2}$  (۱)

پاسخ:

$$(\sin 2x - \cos 2x)^2 = 1 - \sin(2 \times 2x) = 1 - \sin 4x \rightarrow 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

۴- حاصل عبارت  $(\sin \alpha + \cos \alpha + 1)(\sin \alpha + \cos \alpha - 1)$  به ازای  $\alpha = \frac{7\pi}{12}$  کدام است؟

- (۱)  $\frac{1}{2}$  (۲)  $\frac{1}{2}$  (۳)  $-\frac{1}{2}$  (۴)  $-1$

پاسخ:

$$\begin{aligned}
 & (\sin \alpha + \cos \alpha + 1)(\sin \alpha + \cos \alpha - 1) \xrightarrow{\sin \alpha + \cos \alpha = A} (A+1)(A-1) \longrightarrow A^2 - 1 \\
 & \xrightarrow{A^2 = (\sin \alpha + \cos \alpha)^2 = 1 + \sin 2\alpha} (1 + \sin 2\alpha) - 1 \longrightarrow \sin 2\alpha \xrightarrow{\alpha = \frac{7\pi}{12}} \sin \frac{14\pi}{12} \\
 & = \sin \frac{7\pi}{6} = \sin\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right) = -\sin \frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

۵- تست: اگر  $\tan x = \sqrt{2}$  باشد، حاصل  $\frac{1 - \cos 2x}{1 + \cos 2x}$  کدام است؟

- (۱)  $2\sqrt{2}$  (۲)  $2$  (۳)  $\frac{\sqrt{2}}{2}$  (۴)  $1$

پاسخ:

$$\frac{1 - \cos 2x}{1 + \cos 2x} \longrightarrow \frac{2 \sin^2 x}{2 \cos^2 x} = \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)^2 = \tan^2 x = (\sqrt{2})^2 = 2$$

۶- حاصل  $\tan 2^\circ (1 + \cos 4^\circ)$  کدام است؟

- (۱)  $\sin 1^\circ$  (۲)  $\sin 2^\circ$  (۳)  $\sin 4^\circ$  (۴)  $1$

پاسخ:

$$\begin{aligned}
 \tan 2^\circ (1 + \cos 4^\circ) & \rightarrow \tan 2^\circ \times 2 \cos^2 2^\circ \rightarrow \frac{\sin 2^\circ}{\cos 2^\circ} \times 2 \cos^2 2^\circ \\
 & \rightarrow \sin 2^\circ \times 2 \cos 2^\circ \rightarrow 2 \sin 2^\circ \cos 2^\circ \xrightarrow{\sin 2\alpha} \sin 4^\circ
 \end{aligned}$$

۷- اگر  $\alpha - \beta = \frac{\pi}{4}$  و  $\tan \beta = \frac{1}{2}$  باشد، مقدار  $\sin 2\alpha$  کدام است؟

(۴) ۰.۸

(۳) ۰.۷۵

(۲) ۰.۶

(۱) ۰.۴۵

پاسخ:

$$\alpha - \beta = \frac{\pi}{4} \xrightarrow{+\beta} \alpha = \beta + \frac{\pi}{4} \xrightarrow{\times 2} 2\alpha = 2\beta + \frac{\pi}{2} \xrightarrow{\sin 2\alpha} \sin 2\alpha = \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2\beta\right) \longrightarrow \sin 2\alpha = \cos 2\beta$$

پس انگار تست گفته: اگر  $\tan \beta = \frac{1}{2}$  باشد،  $\cos 2\beta = ?$

$$\tan \beta = \frac{1}{2} \xrightarrow{\cos} \tan^2 \beta + 1 = \frac{1}{\cos^2 \beta} \longrightarrow \frac{1}{4} + 1 = \frac{1}{\cos^2 \beta} \Rightarrow \cos \beta = \pm \frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$\xrightarrow{\cos 2\beta} \cos 2\beta = 2\cos^2 \beta - 1 \longrightarrow \cos 2\beta = 2\left(\pm \frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2 - 1 = 2 \times \frac{4}{5} - 1 = \frac{8}{5} - 1 = \frac{3}{5} = ۰.۶$$

۸- تست: هرگاه  $\frac{\sin \alpha}{\sin \alpha + \cos \alpha} = ۳$  باشد، مقدار  $\tan 2\alpha$  کدام است؟

(۴) -۳

(۳)  $\frac{۱۲}{۵}$

(۲)  $-\frac{۳}{۲}$

(۱)  $\frac{۶}{۵}$

پاسخ:

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \alpha + \cos \alpha} = ۳ \longrightarrow \sin \alpha = ۳ \sin \alpha + ۳ \cos \alpha \longrightarrow -۲ \sin \alpha = ۳ \cos \alpha$$

$$\Rightarrow \sin \alpha = -\frac{۳}{۲} \cos \alpha \xrightarrow{+\cos \alpha} \tan \alpha = -\frac{۳}{۲} \xrightarrow{\tan 2\alpha} \tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}$$

$$\longrightarrow \tan 2\alpha = \frac{2 \times \left(-\frac{۳}{۲}\right)}{1 - \left(-\frac{۳}{۲}\right)^2} = \frac{-۳}{1 - \frac{۹}{۴}} = \frac{-۳}{-\frac{۵}{۴}} = \frac{۱۲}{۵}$$

۹- حاصل  $\tan 2x \cot x - \tan x \tan 2x$  کدام است؟

(۴) -۲

(۳)  $\frac{1}{2}$

(۲) ۲

(۱) ۱

پاسخ:

$$\tan 2x \cot x - \tan x \tan 2x \longrightarrow \tan 2x (\cot x - \tan x) \longrightarrow \tan 2x \times 2 \cot 2x$$

$$\longrightarrow 2 \tan 2x \cot 2x = 2 \times 1 = ۲$$

۱۰- اگر  $\tan \alpha + \cot \alpha = ۶$  باشد، حاصل  $\cos 2\alpha$  کدام است؟

(۴)  $\pm \frac{1}{4}$

(۳)  $\pm \frac{2\sqrt{2}}{3}$

(۲)  $\pm \frac{1}{6}$

(۱)  $\pm \frac{1}{3}$

9 فرمول نامه روابط مشترک

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}, \quad 1 + \cot^2 x = \frac{1}{\sin^2 x}$$

$$\sin(2x) = 2 \sin(x) \cos(x)$$

$$\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x) = 2 \cos^2(x) - 1 = 1 - 2 \sin^2(x)$$

$$\tan(2x) = \frac{2 \tan(x)}{1 - \tan^2(x)}$$

$$1 - \cos 2x = 2 \sin^2 x, \quad 1 + \cos 2x = 2 \cos^2 x$$

$$(\sin(x) \pm \cos(x))^2 = 1 \pm \sin(2x)$$

$$\sin^4 x + \cos^4 x = 1 - \frac{1}{2} \sin^2(2x) \quad \sin^6 x + \cos^6 x = 1 - \frac{3}{4} \sin^2(2x)$$

$$\cos^4 x - \sin^4 x = \cos(2x)$$

$$\tan(x) + \cot(x) = \frac{2}{\sin(2x)} \quad \cot(x) - \tan(x) = 2 \cot(2x)$$

$$\sin^2(x) = \frac{1 - \cos(2x)}{2} \quad \cos^2(x) = \frac{1 + \cos(2x)}{2}$$

$$\tan^2(x) = \frac{1 - \cos(2x)}{1 + \cos(2x)}$$

$$\sin\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{2 \tan\left(\frac{x}{2}\right)}{1 + \tan^2\left(\frac{x}{2}\right)}, \quad \cos\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1 - \tan^2\left(\frac{x}{2}\right)}{1 + \tan^2\left(\frac{x}{2}\right)}$$

$$\tan\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{\sin(x)}{1 + \cos(x)}$$

$$\sin(x \pm y) = \sin(x) \cos(y) \pm \sin(y) \cos(x)$$

$$\cos(x \pm y) = \cos(x) \cos(y) \mp \sin(y) \sin(x)$$

$$\tan(x \pm y) = \frac{\tan(x) \pm \tan(y)}{1 \mp \tan(x) \tan(y)}$$







## امیر وفائی

مدرس ریاضیات دوره دوم متوسطه از پایه تا کنکور - متخصص هر دو رشته ریاضی و تجربی

طراح سوالات همه شاخه های ریاضی کانون فرهنگی آموزش (قلمچی)

رتبه ۲۶ کنکور سراسری

نفر اول دوره کارشناسی و کارشناسی ارشد مهندسی عمران دانشگاه صنعتی شریف

پذیرفته شده دوره دکتری مستقیم مهندسی عمران دانشگاه صنعتی شریف

رکورددار معدل دانشکده عمران دانشگاه صنعتی شریف از بدو تاسیس تا کنون

کسب عنوان دانشجوی نمونه دانشکده عمران و دانشگاه صنعتی شریف در سال ۱۳۹۴ و ۱۳۹۵

سابقه بیش از ۱۰ ترم استادیاری (دستیار استاد) در دروس مختلف تخصصی و عمومی دانشگاه صنعتی شریف

گذراندن دوره فرعی رشته ریاضی دانشگاه صنعتی شریف

استاد حل تمرین ریاضی دانشگاه صنعتی شریف

حضور در مدرسه شهیدبشهرتی ۱ (تیزهوشان) از سال ۹۲ به عنوان مشاور و مدرس ریاضی

تالیف کتاب تا کنکور با همکاری مدرسه تیزهوشان

مبتکر برنامه های جمعبندی ویژه ۱۰۰-۱۰۰ در همه پایه ها با مشابهت ۱۰۰ درصدی در کنکور سراسری

آموزش مفهومی و متفاوت درس ریاضی منطبق بر برنامه دقیق تدریس و آزمون و برنامه تست

مدرس رتبه های برتر (تک رقمی و دو رقمی)



AMIRVAFAEIG



[www.Donat.Academy](http://www.Donat.Academy)

هر گونه کپی برداری از محتوای این جزوه پیگرد قانونی دارد و مولف هیچ گونه رضایتی

مبنی بر استفاده بدون اجازه از محتوای جزوه، ندارد. (All Rights Reserved)