وفا
آموزش تخصصی ریاضیات

امیر وفائی

جزوات آموزش ریاضی

احتمال

(ادامه احتمال دهم)

- رشته تجربی:
ریاضی یازدهم فصل ۷ + ریاضی دوازدهم فصل ۷
- رشته ریاضی:
فصل ۲ کتاب آمار و احتمال

@vafaei_math
AmirVafaei6
0936 879 1709
www.Donat.academy

فهرست مطالب

1 پیشامدهای مستقل

دو پیشامد را مستقل گوئیم هرگاه:

۱- احتمال یکی بر دیگری تاثیری نداشته باشد.

۲- دو پیشامد بتوانند در یک لحظه رخ دهند.

۳- $p(A \cap B) = p(A) \times p(B)$

تذکر ۲) در اکثر موارد می‌توان عنوان نمود که دو پیشامد، فضای نمونه‌ای جدا از هم دارند!!!

پوشیدن لباس گرم در شهر ساری و تصادف در شهر تهران!!!

نتایج: برای دو پیشامد مستقل A و B :

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A)p(B)$$

$$p(A - B) = p(A) - p(A)p(B) = p(A)(1 - p(B)) = p(A)p(B') \to$$

$$p(B - A) = p(B) - p(A)p(B) = p(B)(1 - p(A)) = p(A')p(B) \to$$

$$p(A' \cap B') = 1 - p(A \cup B) = 1 - p(A) - p(B) + p(A)p(B)$$
$$= 1 - p(A) - p(B)(1 - p(A)) = (1 - p(A))(1 - p(B)) = p(A')p(B') \to$$

مثال ۱) امیر (A)و علی(B) مشغول تیراندازی می باشند. این دو نفر به ترتیب هر کدام ۶۰ و ۲۰ % احتمال موفقیت در تیراندازی دارند.مطلوب است :

احتمال اصابت تیر به هدف ؟

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B) =$$

احتمال اینکه فقط علی موفق شود ؟

$$p(B - A) = p(B) - p(A \cap B) =$$

مثال ۲) احتمال آن را بیابید که از بین سه نفر علی و امیر و محمد، روز تولد حداقل دو نفر یکسان باشد؟(در هفته)

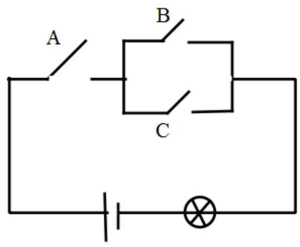
$$\frac{\binom{3}{2} \times 7 \times 1 \times 6 + \binom{3}{3} \times 7 \times 1 \times 1}{7 \times 7 \times 7}$$

مثال ۳) در یک تیراندازی با اسلحه احتمال موفقیت در هر شلیک ٪۸۰ می باشد آزمایش آن است که آن قدر تیر بزند تا موفق شود!

- احتمال موفقیت با دقیقاً ۴ گلوله چقدر است؟ $\left(\frac{۲}{۱۰}\right)^۳ \times \frac{۸}{۱۰}$

- احتمال موفقیت با حداقل ۴ گلوله چقدر است ؟ $۱ - \left(\frac{۸}{۱۰} + \frac{۲}{۱۰} \times \frac{۸}{۱۰} + \left(\frac{۲}{۱۰}\right)^۲ \frac{۸}{۱۰}\right) = \frac{۸}{۱۰۰۰}$

مثال ۴) در یک کارخانه احتمال سالم بودن دستگاه a,b بترتیب ۶۰ و ۸۰ % می باشد . با کدام احتمال در یک بازرسی حداکثر یکی سالم است؟



مثال ۵) در مدار شکل زیر احتمال بسته بودن C,B,A بترتیب $\frac{۱}{۲},\frac{۱}{۳},\frac{۱}{۴}$ می باشد احتمال روشن شدن لامپ چقدر است؟

$$p(A\cap(B\cup C))=p(A)\times p(B\cup C)=p(A)\times(p(B)+p(C)-p(B\cap C))$$
$$=p(A)\times(p(B)+p(C)-p(B)\times p(C))=\frac{1}{2}\times(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{3}\times\frac{1}{4})=\frac{1}{4}$$

مثال ۶) در یک کیسه با ۴ مهره سیاه و ۵ مهره سفید ، دو مهره به تصادف و یکی پس از دیگری و بدون جایگذاری خارج می کنیم . احتمال همرنگ بودن دو مهره چقدر است؟

$$\frac{4}{9}\times\frac{3}{8}+\frac{5}{9}\times\frac{4}{8}=\frac{72}{36}=\frac{16}{36}$$

$$\frac{\binom{5}{2}+\binom{4}{2}}{\binom{9}{2}}=\frac{10+6}{36}=\frac{16}{36}$$

تذکر ۳) دقت کنید خارج کردن بصورت (یکی پس از دیگر - بدون جایگذاری) ویا (یک جا) در این سوال هیچ فرقی ایجاد نمی کند. ولی بسته ب بیان مساله میتواند پاسخ ها تغییر کند (مثلا اگر مطرح میشد اولی سیاه و دومی سفید فقط روش اول قابل استفاده بود!) – پیشنهاد سر آشپز این است که هر طوری که بیان مساله بود، حل کنید!

مثال ۷) مثال ۶ در حالت انتخاب یکی پس از دیگری و با جایگذاری چطور حل می شود؟

مثال ۸) یک سکه و تاس را باهم پرتاپ میکنیم چقدر احتمال سکه رو و تاس زوج بیاید؟

تذکر ۴) بد نیست بدانید اگر یکی از اعضای یک پیشامد رخ داده باشد، به معنای رخ دادن آن پیشامد است!

2 احتمال غیر هم‌شانس

در پرتاب تاس همگن (FAIR) احتمال رو شدن هر عدد با اعداد دیگر برابر می باشد اما در تاس ناهمگن (UNFAIR) یا سکه ناهمگن دیگر احتمال ها برابر نمی‌باشد یا وقتی افراد مختلف باهم مسابقه می‌دهند دلیلی بر یکسان بودن احتمال پیروزی هر شخص نیست!

معرفی یک نماد : $p\{x_1, x_2\} = p\{x_1\} + p\{x_2\}$

قانون محاسبه احتمالات در این فضا این است که هیچ احتمالی منفی نیست و مجموع تمام احتمال های نسبت داده شده، یک می باشد. به مثال زیر دقت کنید:

مثال ۹) در یک تاس معیوب احتمال رو شدن هر عدد متناسب با عدد روی آن است. با کدام احتمال در یکبار پرتاب این تاس عدد رو شده زوج می باشد ؟

$$p(1) = 1(x), p(2) = 2(x), p(3) = 3(x), \ldots\ldots, p(6) = 6(x)$$

$$p\{1,2,3,4,5,6\} = 1 \rightarrow x + 2x + 3x + 4x + 5x + 6x = 1 \rightarrow x = \frac{1}{21}$$

$$p\{2,4,6\} = 2x + 4x + 6x = 12x = \frac{12}{21} = \frac{4}{7}$$

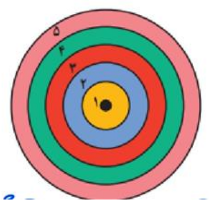
مثال ۱۰) تاسی بگونه ای ساخته شده که $P(1) = \frac{1}{12}$ و هم چنین $P(1)$ تا $P(6)$ تشکیل دنباله حسابی می دهند. احتمال ظاهر نشدن ۵ در این تاس چقدر است؟

$$P(1) = \frac{1}{12} = a \Rightarrow P(2) = a + d, \ldots\ldots, P(6) = a + 5d \Rightarrow P\{1,2,\ldots,6\} = 1$$

$$6a + (5+4+3+2+1)d = 1 \rightarrow 6a + 15d = 1 \rightarrow \frac{6}{12} + 15d = 1$$

$$\Rightarrow d = \frac{1}{30} \rightarrow 1 - P(5) = 1 - a - 4d =$$

مثال ۱۱) سکه ای به گونه ای ساخته شده که هر دو بار که رو می آید، یکبار پشت می آید. اگر ۳ پرتاب با این سکه غیر منصف داشته باشیم، چقدر احتمال دارد دو بار پشت سرهم پشت بیاید؟



مثال ۱۲) در پرتاب یک دارت به یک صفحه دایره ای شکل، مطابق شکل رو به رو که به پنج ناحیه تقسیم شده است، فرض کنید احتمال اصابت دارت به ناحیه ی اول، x باشد. اگر احتمال اصابت به ناحیه kام، $(2k-1)x$ باشد:

الف) احتمال اصابت دارت به هر ناحیه را به دست آورید.

$$5 \rightarrow 9x, \; 4 \rightarrow 7x, \; 3 \rightarrow 5x, \; 2 \rightarrow 3x, \; 1 \rightarrow x$$

$$P\{1,2,3,4,5\} = 1 \rightarrow (9+7+5+3+1)x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{25} = 0/04$$

ب) احتمال اصابت دارت به یکی از ناحیه های اول، سوم یا چهارم بیشتر است، یا اصابت به دو ناحیه ی دوم یا پنجم؟

$$P\{1,3,4\} = (7+5+1)x = 13x, \; P\{2,5\} = 12x \quad \Rightarrow 13 > 12$$

3 احتمالات شرطی

۱-۳ مفاهیم

مثال مفهومی!

احتمال وقوع پیشامد A به شرط آنکه پیشامد B رخ داده باشد، از رابطه زیر بدست می آید.

$$p(A|B)=\frac{n(A\cap B)}{n(B)}=\frac{p(A\cap B)}{p(B)}$$

شما احتمال وقوع پیشامد B به شرط A را بنویسید !

تذکر ۵) در واقع فضای نمونه‌ای کاهش می‌یابد به پیشامدی که میدانیم رخ داده!

مثال ۱۳) دو تاس را با هم پرتاب می کنیم. اگر دست کم در یکی از تاس ها عدد ۳ ظاهر شده باشد، احتمال آنکه مجموع دو تاس ۷ باشد، چقدر است ؟

$$A=\{(۱,۶),(۲,۵),(۳,۴),(۴,۳),(۵,۲),(۶,۱)\}$$

$$B=\{(۳,۱),(۳,۲),(۳,۳),(۳,۴)(۳,۵),(۳,۶),(۱,۳),(۲,۳),(۴,۳),(۵,۳),(۶,۳)\}$$

$$A\cap B=\{(۳,۴),(۴,۳)\}\quad\Rightarrow\quad P(A|B)=\frac{n(A\cap B)}{n(B)}=\frac{۲}{۱۱}$$

مثال ۱۴) سازنده قطعات یدکی کارخانه ای از روی تجربه می داند، احتمال اینکه سفارشی به موقع برای ارسال آماده شود ۰/۹ است و احتمال آنکه سفارشی به موقع برای ارسال آماده و به موقع تحویل مشتری شود برابر ۰/۶ است. احتمال آنکه سفارشی به موقع تحویل مشتری شود به شرط آنکه به موقع ارسال شده باشد چقدر است؟

مثال ۱۵) ظرفی شامل ۴ مهره سفید و ۳ مهره سیاه است. دومهره به تصادف، پی در پی و بدون جایگذاری از ظرف خارج می کنیم. اگر مهره اول سیاه باشد (B) با کدام احتمال دومی نیز سیاه است (A) (فرمولی + کاهش فضای نمونه ای)

$$p(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}\Rightarrow P(B)=\frac{\binom{۳}{۱}}{\binom{۷}{۱}}=\frac{۳}{۷},P(A\cap B)=\frac{۳}{۷}\times\frac{۲}{۶}=\frac{۱}{۷}\Rightarrow P(A|B)=\frac{\frac{۱}{۷}}{\frac{۳}{۷}}=\frac{۱}{۳}$$

$$\frac{۳-۱}{۳+۴-۱}=\frac{۲}{۶}=\frac{۱}{۳}$$

۲-۳ چند بحث مفهومی جالب

می توان نشان داد که

- $p(A|S)=p(A)$
- $p(S|B)=1$
- $p(A_1|A_2)=p(A_2|A_1)=0 \Leftrightarrow P(A_1\cap A_2)=0 \Leftrightarrow$ A_1 و A_2 ناسازگار
- $p(A_1|A_2)=p(A_1) \Leftrightarrow P(A_1\cap A_2)=P(A_1)\,P(A_2) \Leftrightarrow$ A_1 و A_2 مستقل اند

۳-۳ قوانین شرطی

نشان دهید فرمول احتمال شرطی در قضیه های احتمال صدق می کند یعنی :

$a)\ p(\phi|C)=0$

$b)\ p(A'|C)=1-p(A|C)$

$$p(A'|C)=\frac{P(A'\cap C)}{P(C)}=\frac{P(C-A)}{P(C)}=\frac{P(C)-P(A\cap C)}{P(C)}$$

$$=\frac{P(C)}{P(C)}-\frac{P(A\cap C)}{P(C)}=1-P(A|C)$$

$c)\ p((A-B)|C)=p(A|C)-p((A\cap B)|C)$

$d)\ p((A\cup B)|C)=p(A|C)+p(B|C)-p((A\cap B)|C)$

مثال ۱۶) اگر بدانیم $p(A\cup B|C)=\frac{1}{2}$, $p(A-B|C)=\frac{1}{3}$ و پیشامدهای B', C نیز مستقل اند مقدار $p(B)$ چقدر است؟

$p(A-B|C)=p(A|C)-p(A\cap B|C)$, $p(A\cup B|C)=p(B|C)+p(A|C)-p(A\cap B|C)$

$\Rightarrow p(A\cup B|C)-p(A-B|C)=p(B|C)=p(B)\Rightarrow \frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{1}{6}=p(B)$

مثال ۱۷) (تمرین)نشان دهید $p(C|(A\cap B))=p(C|B)\rightarrow p(A|(B\cap C))=p(A|B)$

$p(C|(A\cap B))=p(C|B)\rightarrow \frac{p(C\cap(A\cap B))}{p(A\cap B)}=\frac{p(C\cap B)}{p(B)}\rightarrow .....$

۴-۳ پیشامد وابسته و مستقل و ناسازگار و قانون ضرب احتمال

وابسته : مستقل نیستند و وقوع یکی روی دیگری تاثیر می گذارد. یعنی اینکه اگر بدانیم رخ داده یا نه، روی دیگری موثر است!

$$p(A|B)=\frac{p(A\cap B)}{p(B)}\rightarrow p(A\cap B)=p(B)p(A|B)$$

$$p(B|A)=\frac{p(A\cap B)}{p(A)}\rightarrow p(A\cap B)=p(A)p(B|A)$$

$$*p(B|A)\times p(A)=p(A|B)\times p(B)=p(A\cap B)$$

$$**p(A|B)=\frac{p(B|A)\times p(A)}{p(B)}$$

مستقل: دو پیشامد نامربوط که در قسمتهای قبلی تعریف شده : $p(A\cap B)=p(A)\times p(B)$

ناسازگار: مطابق قسمت های قبلی دو پیشامد مربوط بدون اشتراک: $p(A\cap B)=0$

مثال ۱۸) یک تولید کننده از روی تجربه می داند احتمال آنکه کسی آگهی تبلیغاتش را بخواند(A) ۰/۷ است و احتمال این که کسی محصول این تولیدی را بخرد(B) به شرط آنکه آگهی تبلیغاتش را خوانده باشد، برابر ۰/۴۵ است. احتمال آنکه کسی آگهی تبلیغات این تولید کننده را خوانده باشد و محصولش را بخرد چقدر است ؟

$$p(A)=0/7\ ,\ p(B|A)=0/45\rightarrow p(A\cap B)=p(B|A)\times p(A)=0/45\times 0/7=....$$

مثال ۱۹) احتمال زنده ماندن در یک عمل پیوند برابر ۰/۵ است. اگر فرد پس از عمل زنده باشد، احتمال آنکه بدن او در طول یک ماه پیوند را قبول نکند و بمیرد ۰/۲ است. احتمال زنده ماندن یک بیمار پیوندی بعد از این دو مرحله چقدر است؟

موفقیت پیوند A زنده ماندن B P(A)=۰/۵

$$P(B'|A)=۰/۲\rightarrow P(B|A)=۱-۰/۲=۰/۸$$

$$P(A\cap B)=?\ =P(B|A)\times P(A)=۰/۸\times ۰/۵=۰/۴$$

مثال ۲۰) تیم والیبال ایران، ۱۴ بازیکن دارد که قد هیچ دو بازیکنی برابر نیست. اگر به طور متوالی و بدون جایگذاری ، دو بازیکن به تصادف انتخاب کنیم، در صورتی که بازیکن اول از بازیکن دوم قد بلند تر باشد(B)،

الف) با کدام احتمال بازیکن اول بلند قامت ترین بازیکن تیم است ؟ (A)

$$p(A|B)=\frac{p(A\cap B)}{p(B)}=\frac{?}{p(B)}=\frac{p(B|A)\times p(A)}{p(B)}=\frac{1\times\frac{1}{14}}{\frac{1}{2}}=\frac{1}{7}$$

ب) با کدام احتمال بازیکن اول از نظر بلندی قد نفر ۱۳ است ؟(C)

$$p(C|B)=\frac{p(C\cap B)}{p(B)}=\frac{p(B|C)\times p(C)}{p(B)}=$$

۵-۳ قانون ضرب احتمال ۳ مجموعه ای

$$p(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = p(A_1) \times p(A_2 | A_1) \times p(A_3 | (A_1 \cap A_2))$$

اثبات در متفرقه ویژه رشته ریاضی - به فرمول این رابطه نیاز ندارید!!!

این قانون برای n پیشامد A۱، A۲، ....، An با احتمال های مثبت از فضای نمونه ای S نیز قابل تعمیم است.

نوشتن این قانون برای n پیشامد ، به $n!$ طریق امکان پذیر است !

مثال ۲۱) کیسه ای شامل ۲ مهره سبز و ۴ قرمز و ۵ آبی است. از این کیسه به تصادف ۳ گوی به ترتیب و بدون جایگذاری خارج می کنیم :

الف) چقدر احتمال دارد اولی سبز و دومی قرمز و سومی آبی باشد؟

ب) احتمال اینکه فقط گوی اول و سوم آبی باشد، چقدر است ؟

مثال ۲۲) جعبه‌ای دارای ۱۲ لامپ شامل ۳ لامپ خراب است . اگر به تصادف ۳ لامپ متوالیا و بدون جایگذاری از جعبه برداریم، احتمال اینکه هر سه معیوب باشند چقدر است ؟

احتمال اینکه حداقل یک لامپ خراب باشد، چقدر است ؟

$$\frac{3}{12} \times \frac{2}{11} \times \frac{1}{10} = \frac{1}{220}$$

$$1 - \frac{9}{12} \times \frac{8}{11} \times \frac{7}{10} = 1 - \frac{21}{55} = \frac{34}{55}$$

مثال ۲۳) یک بازیکن فوتبال در هنگام زدن ضربات پنالتی اگر روحیه ی خوبی داشته باشد، به احتمال ۹۰ درصد و اگر روحیه ی خوبی نداشته باشد، به احتمال ۶۰ درصد گل می زند. فرض می کنیم اگر بازیکن یک ضربه پنالتی را وارد دروازه کند، روحیه ی خوبی دارد و در غیر این صورت روحیه ی خوبی ندارد. اگر این بازیکن قبل از اولین ضربه، روحیه ی خوبی داشته باشد، با کدام احتمال از سه ضربه ی متوالی او :

الف) دقیقاً دو ضربه ی آخر گل می شود؟ $(1-0/9) \times 0/6 \times 0/9 = 0/054$

ب) فقط ضربه ی آخر گل می شود؟

پ) فقط ضربه ی اول گل می شود؟ $= 0/036$

۶-۳ مثال بیشتر

مثال ۲۴) جعبه‌ای شامل ۴ مهره سفید و ۶ مهره سیاه است. دو مهره به تصادف و یکی پس از دیگری خارج می کنیم. احتمال آنکه هر دو سیاه باشند(و همچنین احتمال سیاه بودن دومی) در دو حالت زیر:
(بعد از حل ، جرج پولیا را در نظر بگیرید !)

۱- بدون جایگذاری

سیاه بودن اولی و دومی :
$$P(b_1 \cap b_2) = P(b_1) \times P(b_2 | b_1) = \frac{6}{10} \times \frac{5}{9} = \frac{1}{3}$$

توجه: اگر مهره اول سفید بود ← احتمال آنکه دومی سیاه بوده باشد؟ ←
$$P(b_2 | w_1) = \frac{6}{9}$$

توجه: اگر بپرسند چقدر احتمال دارد مهره اول سفید باشد و مهره دوم سیاه باشد :
$$P(w_1 \cap b_2) = P(w_1) \times P(b_2 | w_1) = \frac{4}{10} \times \frac{6}{9} = \frac{4}{15}$$

اگر می پرسند کلاً احتمال سیاه بودن مهره دومی:
$$P(b_2) = P(b_1 \cap b_2) + P(w_1 \cap b_2) = \frac{3}{5}$$

۲- با جایگذاری

سیاه بودن دومی به شرط سیاه بودن اولی :
$$P(b_2 | b_1) = P(b_2) = \frac{6}{10}$$

$$P(b_1 \cap b_2) = P(b_1) \times P(b_2 | b_1) = P(b_1) \times P(b_2) = \frac{6}{10} \times \frac{6}{10} = \frac{9}{25}$$

توجه: اگر مهره اول سفید بود ← احتمال آنکه دومی سیاه بوده باشد؟ ←
$$P(b_2 | w_1) = P(b_2) = \frac{6}{10}$$

توجه: اگر بپرسند چقدر احتمال دارد مهره اول سفید باشد و مهره دوم سیاه باشد :
$$P(w_1 \cap b_2) = P(w_1) \times P(b_2 | w_1) = P(w_1) \times P(b_2) = \frac{4}{10} \times \frac{6}{10} = \frac{6}{25}$$

اگر می پرسند کلاً احتمال سیاه بودن مهره دومی:
$$P(b_2) = P(b_1 \cap b_2) + P(w_1 \cap b_2) = \frac{15}{25} = \frac{3}{5}$$

حالا مساله سیاه بودن مهره دوم رو با جرجی جونم بررسی کن !

مثال ۲۵) در پرتاب ۳ سکه اگر دست کم روی یکی ظاهر شده باشد، احتمال آنکه حداکثر روی دو تا ظاهر شده باشد، چقدر است ؟

مثال ۲۶) یک سکه را ده بار متوالی پرتاب می کنیم و هر ۱۰ بار رو ظاهر می گردد. احتمال آنکه در یازدهمین پرتاب رو بیاید چقدر است؟

مثال ۲۷) خانواده ای دارای ۲ فرزند است احتمال آنکه فرزند بزرگتر پسر و کوچکتر دختر باشد، چقدر است ؟

مثال ۲۸) خانواده‌ای داراری ۳ فرزند می باشد. اگر فرزند اول دختر باشد، احتمال آنکه فرزند سوم پسر باشد چقدر است؟

چون مستقل اند پس جواب برابر است با ....

مثال ۲۹) در خانواده ای با ۳ فرزند اگر بدانیم تنها یکی از فرزندان دختر باشد، احتمال پسر بودن سومین فرزند چقدر است ؟

$$BBG - BGB - GBB \Rightarrow p = \frac{2}{3}$$

مثال ۳۰) امیر و علی و محمد در کنکور سراسری شرکت نموده‌اند و احتمال قبولی $\frac{۱}{۶},\frac{۳}{۷},\frac{۲}{۵}$ دارند. اگر فقط یک نفرشان قبول شوند(B)، احتمال آنکه امیر باشد(A) چقدر است ؟

$$p(A|B) = \frac{p(A\cap B)}{p(B)} = \frac{\frac{1}{6}\times(1-\frac{3}{7})\times(1-\frac{2}{5})}{\frac{1}{6}\times(1-\frac{3}{7})\times(1-\frac{2}{5})+(1-\frac{1}{6})\times\frac{3}{7}\times(1-\frac{2}{5})+(1-\frac{1}{6})\times(1-\frac{3}{7})\times\frac{2}{5}}$$

مثال بیشتر در متفرقه!

4 تکمیلی پیشامدهای مستقل و وابسته

4-1 چند مثال از استقلال

مثال ۳۱) در آزمایش پرتاب یک سکه ی سالم و یک تاس سالم با هم،

الف: اگر سکه «رو» ظاهر شود، با کدام احتمال تاس عدد ۶ می آید؟

ب: اگر تاس عدد ۶ ظاهر شود، با کدام احتمال سکه «رو» می آید؟

یادآوری : دو پیشامد A و B با احتمال های غیرصفراز فضای نمونه ی S مستقل اند اگر و تنها اگر:

$$\boxed{P(A|B)=P(A) \quad , \quad P(B|A)=P(B)}$$

مثال ۳۲) دو نفر به نام های A و B با احتمال های قبولی به ترتیب ۰/۷ و ۰/۸ در یک آزمون شرکت می کنند. با کدام احتمال:

الف) هر دو قبول می شوند؟

اگر شرایط آزمون را بدون تأثیر در یکدیگر فرض کنیم، در این صورت قبولی A و قبولی B دو پیشامد مستقل اند و ربطی به هم ندارند. پس داریم :

$$P(A \cap B)=P(A).P(B)=۰/۷\times۰/۸=۰/۵۶$$

ب) دست کم یکی قبول می شود؟

$$P(\text{دست کم یکی قبول})=P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=۰/۷+۰/۸-۰/۵۶=۰/۹۴$$

پ) هیچ کدام قبول نمی شوند؟

$$P(\text{هیچ کدام قبول})=P(A'\cap B')=P((A\cup B)')=۱-P(A\cup B)=۱-۰/۹۴=۰/۰۶$$

ت)فقط A قبول می شود؟

$$P(\text{فقط A قبول})=P(A\cap B')=P(A-B)=P(A)-P(A\cap B)=۰/۷-۰/۵۶=۰/۱۴$$

مثال ۳۳) برای رسیدن به مرحله ی نهایی مسابقات ورزشی لازم است تیم های شرکت کننده در دو دوره مسابقات مقدماتی شرکت نمایند. تیمی که درهر دودوره بازنده شود، به مرحله ینهایی راه نمی یابد. اگر احتمال پیروزی در هر بازی برای تیم A برابر ۰/۸ باشد، احتمال حضور این تیم در مرحله ی نهایی چقدر است؟

۱) ۰/۹ ۲) ۰/۹۶ ۳) ۰/۹۴ ۴) ۰/۹۸

مثال ۳۴) اگر A و B دو پیشامد مستقل باشند به طوری که $P(A\cap B)=0/1$ و $P(A\cap B')=0/4$، حاصل $P(A\cup B')$ را بیابید.

$$\begin{cases} P(A\cap B')=0/4 \Rightarrow P(A-B)=0/4 \Rightarrow P(A)-P(A\cap B)=0/4 \Rightarrow P(A)=0/5 \\ P(A\cap B)=0/1 \xrightarrow[P(A)]{} 0/5\,.P(B)=0/1 \Rightarrow P(B)=\frac{1}{5}=0/2 \\ P(A\cup B')=P(A)+P(B')-P(A\cap B')=0/5+(1-0/2)-0/4=0/9 \end{cases}$$

مثال ۳۵) نشان دهید اگر A و B دو پیشامد مستقل باشند و $A\subseteq B$، آن گاه P(A)=0 یا P(B)=1

(توجه کنید $A\subseteq B$، پس $A\cap B=A$)

$$P(A\cap B)=P(A) \quad , \quad P(A\cap B)=P(A).P(B)$$
$$P(A)=P(A).P(B) \Rightarrow P(A)-P(A).P(B)=0$$
$$\Rightarrow P(A).(1-P(B))=0 \Rightarrow P(A)=0 \text{ or } P(B)=1$$

۲-۴ مدل خاص استقلال پیشامدها

مثال ۳۶) در آزمایش پرتاب دو تاس سالم با هم دو پیشامد زیر را در نظر می گیریم: A: تاس اول عدد ۴ آمده است. B: مجموع دو تاس برابر n است.

نشان دهید برای n=۷، این دو پیشامد مستقل اند و برای n=۶ وابسته اند.

می دانیم $n(S)=6^2=36$. از طرفی پیشامد A عبارتست از:

$$A=\{(4,1),(4,2),(4,3),(4,4),(4,5),(4,6)\} \Rightarrow P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$$

حال به بررسی $A\cap B$ می پردازیم

$$A\cap B=\{(4,3)\} \rightarrow P(A\cap B)=\frac{n(A\cap B)}{n(S)}=\frac{1}{36}=\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}$$

همان طور که ملاحظه می کنید $P(A\cap B)=P(A).P(B)$، پس A و B دو پیشامد مستقل اند.

یک بار دیگر پیشامد B را برای n=۶ (مجموع دو تاس برابر ۶) تشکیل می دهیم:

مثـــال ۳۷)کیسه ای شامل ۵ مهره ی سفید و ۷ مهره سیاه است. دو مهره ی پی در پی و به تصادف از کیسه خارج می کنیم. فرض می کنیم A پیشامد «سفید بودن مهره ی اول» و B پیشامد «سفید بودن مهره ی دوم» است. نشان دهید:

الف: در حالتی که انتخاب مهره ها با جای گذاری است، A و B دو پیشامد مستقل اند.

ب: در حالتی که انتخاب مهره ها بدون جای گذاری است، A و B دو پیشامد وابسته اند.

به طور شهودی نیز می توان مستقل بودن را در حالت با جای گذاری توجیه نمود. چون قبل از انتخاب مهره ی دوم، مهره ی اول به کیسه برگردانده می شود، پس تأثیری درمهره ی دوم ندارد. اما در حالت بدون جای گذاری، چون مهره ی اول به کیسه برگردانده نمی شود، پس آگاهی ما در مورد فضای نمونه ای تغییر کرده است و روی مهره ی دوم اثر دارد.

یک مطلب خوف!

اگر A و B دو پیشامد از فضای نمونه ی S باشند و B', A' متمم های آن ها باشند، این دو پیشامد مستقل اند اگر و تنها اگر رابطه ی زیر بین آن ها برقرار باشد:

	A	A'
B	n_1	n_3
B'	n_2	n_4

A و B مستقل اند $\longleftrightarrow$ $\frac{n_1}{n_2} = \frac{n_3}{n_4}$

مثـــال ۳۸)نمودار تعداد دانش آموزان رشته های ریاضی و تجربی در پایه های ۱۱ و ۱۲ در دو دبیرستان علامه حلی و فرزانگان به صورت زیر است، پیشامدهای رشته و پایه ی تحصیلی در کدام دبیرستان مستقل هستند؟

علامه حلی	ریاضی	تجربی
یازدهم	۱۰۰	۱۲۰
دوازدهم	۵۰	۶۰

فرزانگان	ریاضی	تجربی
یازدهم	۱۰۰	۱۵۰
دوازدهم	۵۰	۱۰۰

۱) فقط علامه حلی
۲) فقط فرزانگان
۳) هر دو دبیرستان
۴) هیچ کدام

بررسی تشریحی و فهم داستان

۴-۳ ناسازگاری و استقلال

می دانیم دو پیشامد ناسازگار، هیچ برآمد مشترکی ندارند. به عبارت دیگر دو پیشامد A و B ناسازگارند هرگاه $A \cap B = \phi$ یا $P(A \cap B) = 0$ یعنی رخ دادن توأم آن ها غیرممکن است. بنابراین واضح است که ناسازگاری دو پیشامد ربطی به مستقل بودن آن ها ندارد. چون اگر A و B دو پیشامد مستقل باشند، آن گاه $P(A \cap B) = P(A).P(B)$، یعنی رخ دادن توأم آن ها قابل قبول است. حال اگر فرض کنیم دو پیشامد ناسازگار و مستقل اند، آن گاه $P(A).P(B) = 0$ و لذا $P(A) = 0$ یا $P(B) = 0$ و به عبارت دیگر حداقل یکی از دو پیشامد، غیرممکن (نشدنی) است.

پس ناسازگاری پیشامدها ربطی به مستقل بودن آن ها ندارد و برعکس.

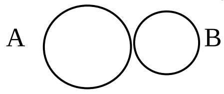
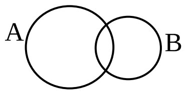
به طور کلی:

قضیه: اگر A و B دو پیشامد با احتمال های مثبت از فضای نمونه ای S باشند،

در صورتی که A و B ناسازگار باشند، مستقل نیستند.

در صورتی که A و B مستقل باشند، ناسازگار نیستند.

به طور خلاصه داریم

A و B دو پیشامد ناسازگارند	A و B دو پیشامد مستقل اند (با احتمال های مثبت)
$A \cap B = \phi$  $P(A \cap B) = 0$ $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ $\cup$ تبدیل به + نمی توانند با هم رخ بدهند. (رخ دادن توأم آن ها غیرممکن است)	$A \cap B \neq \phi$  $P(A \cap B) = P(A).P(B)$ $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A).P(B)$ $\cap$ تبدیل به × می توانند با هم رخ بدهند. (رخ دادن یکی تأثیری در رخ دادن دیگری ندارد.)

متمم گیری ، استقلال پیشامدها را حفظ می کند. یادتان هست ؟؟!!

۴-۴ سه پیشامد مستقل

سه پیشامد A و B و C از یک فضای نمونه ای را مستقل می گوییم هرگاه چهار شرط زیر برقرار باشد

$$\begin{cases} P(A \cap B) = P(A).P(B) \\ P(B \cap C) = P(B).P(C) \\ P(A \cap C) = P(A).P(C) \\ P(A \cap B \cap C) = P(A).P(B).P(C) \end{cases}$$

دقت کنید سه تساوی اول دو به دو مستقل بودن را نشان می دهند.

در حالت کلی، n پیشامد A۱ ، A۲.....و An را مستقل می گوییم هرگاه احتمال اشتراک هر تعداد از این پیشامدها با حاصل ضرب احتمال آن ها برابر باشد (یعنی دو به دو مستقل باشند، سه به سه مستقل باشند و...)

ممکن است سه پیشامد دو به دو مستقل باشند، اما سه پیشامد مستقل نباشند (یعنی ممکن است سه شرط اول صدق کنند، اما شرط چهارم برقرار نباشد)

مثال ۳۹) در آزمایش پرتاب دو سکه ی سالم با هم، سه پیشامد زیر را در نظر می گیریم:

الف: آمدن رو در سکه ی اول   ب: آمدن رو در سکه ی دوم   پ: آمدن فقط یک رو

ثابت کنید این سه پیشامد دو به دو مستقل اند ولی هر سه مستقل نیستند.

الف) $A = \{\text{(ر،ر) و (ر،پ)}\} \Rightarrow P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{۲}{۴} = \frac{۱}{۲}$

ب) $B = \{\text{(ر،ر) و (پ،ر)}\} \Rightarrow P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{۲}{۴} = \frac{۱}{۲}$

پ) $C = \{\text{(ر،پ) و (پ،ر)}\} \Rightarrow P(C) = \frac{n(C)}{n(S)} = \frac{۲}{۴} = \frac{۱}{۲}$

اکنون اشتراک های دو به دو را می یابیم.

$A \cap B = \{\text{(ر،ر)}\} \Rightarrow P(A \cap B) = \frac{n(A \cap B)}{n(S)} = \frac{۱}{۴} = P(A).P(B) \Rightarrow$ A و B مستقل اند

$B \cap C = \{\text{(پ،ر)}\} \Rightarrow P(A \cap C) = \frac{n(A \cap C)}{n(S)} = \frac{۱}{۴} = P(A).P(C) \Rightarrow$ B و C مستقل اند

$A \cap C = \{\text{(ر،پ)}\} \Rightarrow P(A \cap C) = \frac{n(A \cap C)}{n(S)} = \frac{۱}{۴} = P(A).P(C) \Rightarrow$ A و C مستقل اند

همان طور که ملاحظه شد این سه پیشامد دو به دو مستقل اند. اما چون داریم

$$A \cap B \cap C = \phi \rightarrow P(A \cap B \cap C) = ۰ \neq P(A).P(B).P(C)$$

لذا سه پیشامد مستقل نیستند. (در واقع هر سه با هم ناسازگارند.)

مثال ۴۰) سه تیم کوهنوردی A و B و C با احتمال موفقیت به ترتیب، ۴۰، ۴۵ و ۵۰ درصد به طور جداگانه به جهت صعود به قله ی دماوند، اعزام می شوند. احتمال این که حداقل یکی از این تیم ها موفق به صعود شود چقدر است؟

مثال ۴۱) سه نفر تیرانداز به نام های A و B و C با احتمال های به ترتیب $\frac{۱}{۳}, \frac{۱}{۴}, \frac{۱}{۶}$ هدفی را می زنند. اگر هر کدام یک بار تیراندازی کنند، با کدام احتمال فقط یک نفر به هدف می زند؟

۱) $\frac{۵}{۱۲}$ ۲) $\frac{۲۹}{۶۰}$ ۳) $\frac{۳۱}{۷۲}$ ۴) $\frac{۴۹}{۹۰}$

پاسخ گزینه «۳» این سه نفر مستقل از یکدیگرند. پس:

$$= P(A \cap B' \cap C') + P(A' \cap B \cap C') + P(A' \cap B' \cap C) =$$

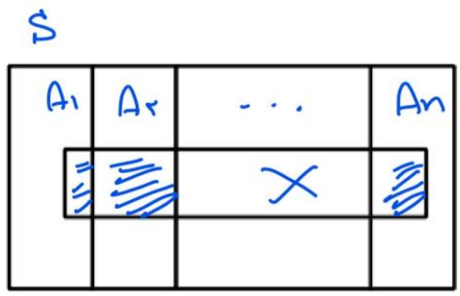
$$P(A).P(B').P(C') + P(A').P(B).P(C') + P(A').P(B').P(C)$$

$$= (\frac{۱}{۶})(۱-\frac{۱}{۴})(۱-\frac{۱}{۳}) + (۱-\frac{۱}{۶})(\frac{۱}{۴})(۱-\frac{۱}{۳}) + (۱-\frac{۱}{۶})(۱-\frac{۱}{۴})(\frac{۱}{۳}) = \frac{۳۱}{۷۲}$$

5 قانون احتمال کل – قائده بیز

۵-۱ مفاهیم

احتمال کل



هرگاه فضای نمونه‌ای S را به پیشامدهای دوبدو ناسازگار $A_1,A_2,A_3,\dots A_n$ افراز کنیم. احتمال وقوع پیشامد X را باید به شرط احتمال وقوع $A_1,A_2,A_3,\dots A_n$ بررسی نمود. بدین ترتیب که ابتدا احتمال وقوع پیشامد A_i را محاسبه کرده و در احتمال وقوع پیشامد X به شرط وقوع A_i ضرب نمود و.......:

$$p(x)=p(x\cap A_1)+p(x\cap A_2)+\dots+p(x\cap A_n)$$

$$p(x)=p(x|A_1)\times p(A_1)+\dots+p(x|A_n)\times p(A_n)=\sum_{i=1}^{n}p(x|A_i)\times p(A_i)$$

قانون بیز (بیژن!)

سوال دیگری که می‌توان پاسخ داد محاسبه احتمال رخداد A_i اگر پیشامد X رخ داده باشد است یعنی :

$$p(A_i|x)=\frac{p(x|A_i)\times p(A_i)}{p(x)}$$

به این فرمول قائده بیز گویند!!!!!

مثـال ۴۲) محصولات یک کارخانه توسط ماشین های A,B,C,D با درصد مشارکت A ۱۰٪, B ۲۰٪, C ۳۰٪, D ۴۰٪ تولید می‌گردند. و درصد معیوب بودن در هر کدام از ماشین ها بترتیب A ۵٪ , B ۱۰٪, C ۱۵٪, D ۲۰٪ می باشد. اگر محصولی از این کارخانه خریداری گردد، چقدر احتمال دارد:

الف) معیوب باشد(X)؟

$$P(X)=P(X|A)P(A)+P(X|B)P(B)+P(X|C)P(C)+P(X|D)P(D)$$

$$=\frac{5}{100}\times\frac{10}{100}+\frac{10}{100}\times\frac{20}{100}+\frac{15}{100}\times\frac{30}{100}+\frac{20}{100}\times\frac{40}{100}=\frac{1500}{10000}=0/15$$

ب) اگر معیوب باشد، چقدر احتمال دارد از ماشین با بیشترین تولید باشد؟

$$P(D|X)=\frac{P(X|D)P(D)}{P(X)}=\frac{\frac{20}{100}\times\frac{40}{100}}{\frac{15}{100}}=\frac{8}{15}$$

۵-۲ مثال های احتمال کلی

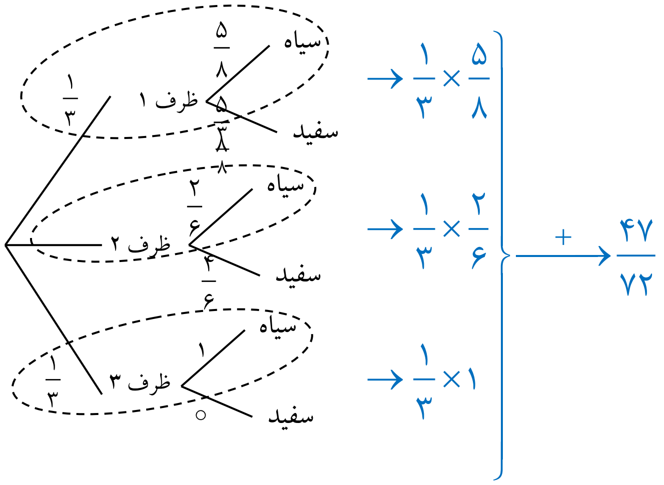
مثال ۴۳) در اولین ظرف از سه ظرف همانند ۳ مهره ی سفید و ۵ مهره ی سیاه، در دومین ظرف ۴ مهره ی سفید و ۲ مهره سیاه و در ظرف سوم فقط سیاه وجود دارد. با چشم بسته از یکی از ظرف ها مهره ای به تصادف انتخاب می کنیم. احتمال سیاه بودن این مهره چقدر است؟

به کمک فرمول داریم :

$$P(b)=P(b|I)\times P(I)+P(b|II)\times P(II)+P(b|III)\times P(III)$$

$$=\frac{۵}{۸}\times\frac{۱}{۳}+\frac{۲}{۶}\times\frac{۱}{۳}+۱\times\frac{۱}{۳}=\frac{۴۷}{۷۲}$$

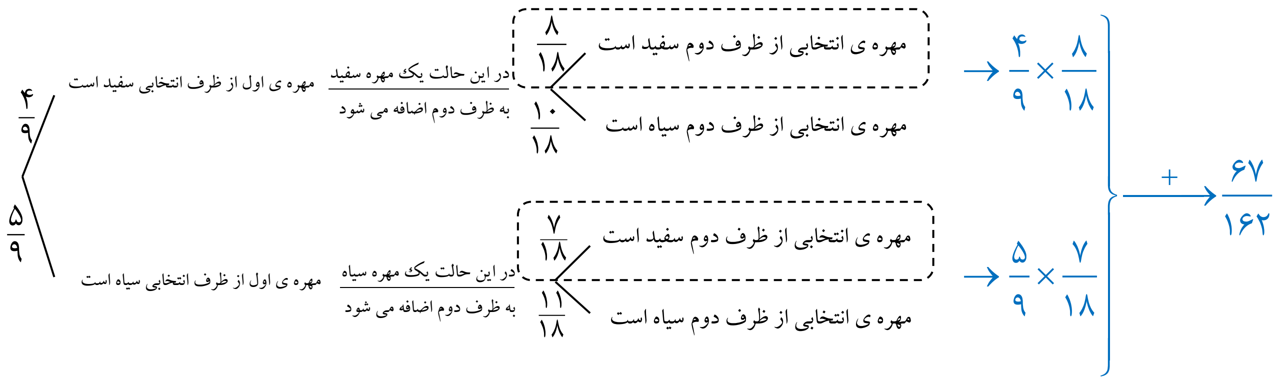
به کمک نمودار درختی داریم:



مثال ۴۴) دو ظرف داریم. اولی ۴ مهره سفید و ۵ مهره ی سیاه و دومی شامل ۷ مهره ی سفید و ۱۰ مهره ی سیاه است. از ظرف اول یک مهره به طور تصادفی برداشته و بدون مشاهده، آن را در ظرف دوم قرار می دهیم. اکنون یک مهره از ظرف دوم بر می داریم. احتمال این که این مهره سفید باشد چقدر است؟

پاسخ: ابتدا بررسی کنیم که رنگ مهره ی انتخابی از ظرف اول چه بوده است. به عبارت دیگر در ظرف دوم به کدام رنگ افزوده شده است.

توجه کنید با توجه به محتویات ظرف اول احتمال سفید بودن مهره ی انتخابی برابر $\frac{۴}{۹}$ و احتمال سیاه بودن آن $\frac{۵}{۹}$ است. داریم:



مثال ۴۵) کیسه ای شامل a مهره ی سفید و b مهره ی سیاه است. مهره ای به تصادف بیرون می آوریم و بدون مشاهده ی رنگ آن، مهره ی دومی خارج می کنیم. احتمال آن که مهره ی دوم سفید باشد چقدر است؟

ابتدا بررسی می کنیم که رنگ مهره ی اول سفید یا سیاه است. می دانیم احتمال سفید بودن مهره ی اول برابر $\frac{a}{a+b}$ و احتمال سیاه بودن آن برابر $\frac{b}{a+b}$ است. اکنون با فرمول احتمال کل داریم :

$$P(W2)=P(W2|W1)\times P(W1)+P(W2|B1)\times P(B1)$$
$$=\frac{a-1}{a+b-1}\times\frac{a}{a+b}+\frac{a}{a+b-1}\times\frac{b}{a+b}=$$
$$=\frac{a(a-1)+ba}{(a+b)(a+b-1)}=\frac{a(a-1+b)}{(a+b)(a-1+b)}=\frac{a}{a+b}$$

همان طور که ملاحظه می شود احتمال «سفید بودن مهره ی دوم» با احتمال «سفید بودن مهره ی اول» برابر است!!

توجه: چون رنگ مهره ی اول را مشاهده نکردیم، آگاهی ما در مورد فضای نمونه ای (تمام حالت های ممکن) تغییری نکرده است. به عبارت دیگر نمی دانیم از کدام رنگ کم شده استپس می توان فرض کرد که مهره ی اول هم چنان داخل کیسه است (تا زمانی که آگاهی ما درمورد فضای نمونه ای تغییری نکرده است، انگار اتفاقی نیفتاده است!) .**(شتر دیدی ندیدی)**

این موضوع قابل تعمیم است. یعنی اگر در بار اول چند مهره خارج کنیم و رنگ آن ها مشخص نباشد، باز هم می توان همگی را داخل کیسه فرض کرد. این مطلب به مسئله ی پولیا معروف است. **(جرجی جونم) - یک مثال دیگه ببینیم :**

مثال ۴۶) کیسه ای شامل ۴ مهره ی سفید و ۵ مهره ی سیاه است. به تصادف سه مهره بیرون می آوریم و بدون مشاهده ی رنگ آن ها مهره ی چهارمی خارج می کنیم. احتمال آن که مهره ی آخر سفید باشد کدام است؟

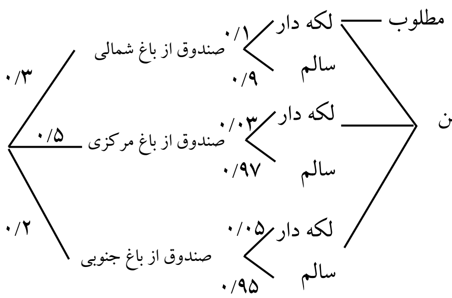
۳-۵ مثال های بیز

مثال ۴۷) سه جعبه مشابه، هر کدام شامل ۱۰ مهره ی یکسان است. مهره های جعبه ی اول آبی، مهره های جعبه ی دوم قرمز و مهره های جعبه ی سوم ۲ عدد آبی و ۸ عدد قرمز اند. به تصادف یک جعبه را انتخاب می کنیم و مهره ای از آن خارج می نماییم. اگر این مهره آبی باشد، چقدر احتمال دارد که همه ی مهره های داخل آن جعبه آبی باشند؟

$$P(I|b)=\frac{P(b|I)\times P(I)}{P(b)}=\frac{\frac{1}{3}\times 1}{\frac{1}{3}\times 1+\frac{1}{3}\times 0+\frac{1}{3}\times\frac{2}{10}}=\frac{5}{6}$$

مثــال ۴۸) میوه فروشی ده صندوق سیب از سه باغ مختلف خریده است. ۳ صندوق از باغ شمالی، ۵ صندوق از باغ مرکزی و ۲ صندوق از باغ جنوبی. در این سه باغ احتمال لکه دار بودن یک سیب به ترتیب ۱۰، ۳ و ۵ درصد است. با فرض این که تعداد سیب ها در صندوق های مختلف برابر است، یک سیب از یکی از صندوق ها به تصادف بر می داریم، اگر این سیب لکه دار باشد، با کدام احتمال از باغ شمالی است؟

همانند آن چه که در قانون احتمال کل گفته شد، نمودار درختی این مسئله به صورت زیر است. با توجه به لکه دار بودن سیب انتخابی، حالت های ممکن را مشخص می کنیم:
پس احتمال موردنظر عبارت است از:

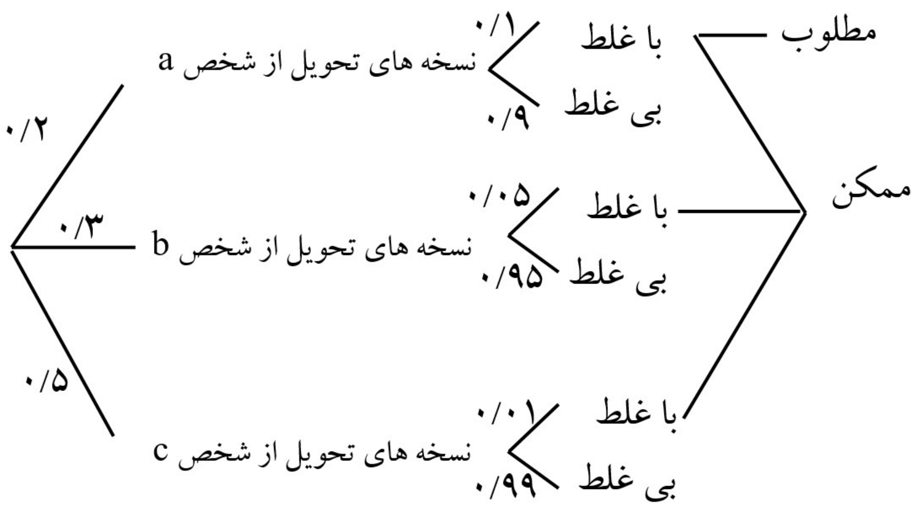


$$P(\text{لکه دار بودن} \mid \text{از باغ شمالی}) = \frac{۰/۳\times۰/۱}{۰/۳\times۰/۱+۰/۵\times۰/۰۳+۰/۲\times۰/۰۵} = \frac{۶}{۱۱}$$

مثــال ۴۹) در یک دبیرستان، ۷۰ درصد دانش آموزان کلاس A و ۸۰ درصد دانش آموزان کلاس B در انتخابات دانش آموزی شرکت کرده اند. اگر تعداد افراد کلاس A سه برابر تعداد افراد کلاس B باشد و فردی به تصادف از بین **رأی دهندگان** این دو کلاس انتخاب کنیم، با کدام احتمال این فرد از دانش آموز کلاس A است؟

چند کلید مهم :
در صورتیکه – می دانیم – اگر – به شرطی که : شرطی ! : بیژن
مشاهده شد – از بین - ..... : بیژن
لم تعدادی به کاربرده شده در سوال قبل!
لم ترجمه قسمت اول سوال قبل !

مثـــال ۵۰) سه نفر با نام های b,a و c نسخه خوان های انتشارات هستند که به ترتیب ۲۰، ۳۰ و ۵۰ درصد نسخه خوانی ها را انجام می دهند. هر کدام از این سه نفر به ترتیب ۹۰، ۹۵ و ۹۹ درصد نسخه ها را بی غلط تحویل می دهند. اگر صفحه ای از نسخه های تحویل داده شده به تصادف انتخاب کنیم و غلط داشته باشد، با کدام احتمال مسئول خواندن این صفحه شخص a بوده است؟



$$P(a\ \text{از شخص}\ |\ \text{غلط دار بودن نسخه}) = \frac{۰/۲\times۰/۱}{۰/۲\times۰/۱+۰/۳\times۰/۰۵+۰/۵\times۰/۰۱} = \frac{۱}{۲}$$

مثـــال ۵۱) در یک دبیرستان، سه کلاس یازدهم (الف)، (ب) و (پ) وجود دارد که به ترتیب ۳۲، ۳۳ و ۳۵ دانش آموز دارند و در آزمون نیم سال اول، از این سه کلاس به ترتیب ۸، ۹ و ۶ نفر به عنوان افراد ممتاز معرفی شده اند. دانش آموزی به تصادف از پایه ی یازدهم این دبیرستان انتخاب می کنیم:

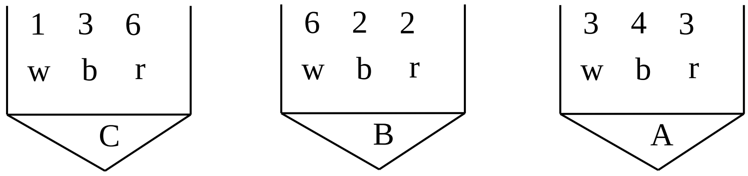
الف: با کدام احتمال این دانش آموز به عنوان ممتاز معرفی شده است؟

ب: اگر این دانش آموز به عنوان ممتاز معرفی شده باشند، با کدام احتمال از کلاس (الف) است؟

حل هوشمندانه !!!!

۴-۵ مثال بیشتر

مثال ۵۲) ظرف های زیر موجودند، یکی از ظرف ها را به تصادف انتخاب می کنیم و مهره ای خارج می کنیم



۱- احتمال سفید بودن مهره چقدر است ؟

$$P(w)=P(w|A)P(A)+P(w|B)P(B)+P(w|C)P(c)$$
$$=\frac{3}{10}\times\frac{1}{3}+\frac{6}{10}\times\frac{1}{3}+\frac{1}{10}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{3}$$

۲- اگر سفید باشد، احتمال اینکه از ظرف A باشد چقدر است ؟

$$P(A|w)=\frac{P(A).P(w|A)}{P(w)}=\frac{\frac{1}{3}\times\frac{3}{10}}{\frac{1}{3}}=\frac{3}{10}$$

حل هوشمندانه !!!!

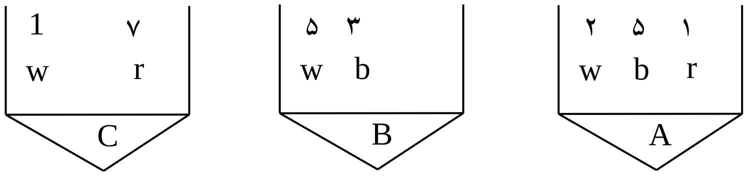
چون احتمال انتخاب ظرف ها برابر و هم چنین در هر ظرف به تعداد مساوی ۱۰ مهره موجود است : پاسخ قسمت اول $P(w)=\frac{10}{30}=\frac{1}{3}$

و پاسخ قسمت دوم : $P(A|w)$: سفید بودن در A $=\frac{3}{10}$

مثال ۵۳) ۳۰٪ کارکنان یک اداره زن(W) می باشند. هرگاه ۲۰٪ کارکنان زن و ۶۰٪ کارکنان مرد دارای اتومبیل(C) باشند. در صورتی که کارمندی از این اداره انتخاب شود، اگر اتومبیل داشته باشد چقدر احتمال دارد مرد باشد؟

$$p(M|C)=\frac{p(C|M)\times p(M)}{p(C|M)\times p(M)+p(C|W)\times p(W)}=\frac{\frac{60}{100}\times\frac{70}{100}}{\frac{60}{100}\times\frac{70}{100}+\frac{20}{100}\times\frac{30}{100}}=\frac{7}{8}$$

مثـال ۵۴) با توجه به ظرف های زیر، ۴ مهره از ظرف A و یک مهره از ظرف B و ۲ مهره از ظرف C خارج کرده و در ظرف چهارمی قرار می دهیم. حال از ظرف چهارم یک مهره بیرون می آوریم :



۱- احتمال سفید بودن این مهره چقدر است؟

$$P(w)=P(w|A)P(A)+P(w|B)P(B)+P(w|C)P(c)$$
$$=\frac{2}{8}\times\frac{4}{7}+\frac{5}{8}\times\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\times\frac{2}{7}=\frac{15}{56}$$

۲- اگر این مهره سفید باشد چقدر احتمال دارد از ظرف C آمده باشد ؟

$$P(C|w)=\frac{P(C).P(w|C)}{P(w)}=\frac{\frac{2}{7}\times\frac{1}{8}}{\frac{15}{56}}=\frac{2}{15}$$

مثـال ۵۵) از دانشجویان پزشکی یک دانشگاه ۴۰ درصد پسر و مابقی دختر هستند. اگر ۲۵ درصد پسران و ۳۰ درصد دختران عینکی باشند. یک دانشجو به تصادف انتخاب می‌کنیم، به کدام احتمال دختر **و** عینکی است؟

مثـال ۵۶) در سوال قبلی اگر دانشجوی عینکی انتخاب کنیم به کدام احتمال دختر است؟

مثال بیشتر در متفرقه! + یک مثال خیلی خفن

6 مسائل پایانی فصل

مثال ۵۷) یک سکه را ۱۰ بار متوالی پرتاب می کنیم. مطلوب است احتمال وقوع:

الف- سه بار رو ظاهر شود؟

$$P(x=۳)=\frac{\binom{۱۰}{۳}}{۲^{۱۰}}=\frac{۱۵}{۱۲۸}$$

ب- حداقل دو بار رو؟

$$P(x\geq ۲)=۱-(P(x=۰)+P(x=۱))=۱-\frac{\binom{۱۰}{۰}+\binom{۱۰}{۱}}{۲^{۱۰}}=\frac{۱۰۱۳}{۱۰۲۴}$$

پ- حداکثر ۹ بار رو؟ .....

$$\frac{۱۰۲۳}{۱۰۲۴}$$

مثال ۵۸) سکه‌ای را پرتاب می‌کنیم. اگر رو بیاید ، تاس میریزیم و اگر نه ۳ بار دیگر سکه میریزیم. احتمال ظاهر شدن دقیقا یک بار روی سکه چقدر است؟

مثال ۵۹) یک سکه را آنقدر پرتاب کریدم تا ۵ بار رو بیاید. احتمال اینکه ۷ بار پرتاب کرده باشیم، چقدر است ؟

$$p(x=5)=\frac{\binom{6}{4}}{2^7}=\frac{15}{128}$$

مثال ۶۰) نسبت احتمال باریدن باران به نباریدن آن $\frac{۱}{۳}$ است. احتمال آن را که در طول هفته ۲ روز باران نیاید؟

مثال ۶۱) دو تیرانداز A,B هرکدام دوبار به سمت هدفی شلیک می کنند و موفقیت هرکدام ۵۰٪ است، احتمال آن را بیابید که :

۱-A از B بیشتر به هدف بزند ؟

$$(B0-A1,2)\qquad (B1-A2)$$

$$\frac{\binom{2}{0}}{2^2}\times\frac{\binom{2}{1}+\binom{2}{2}}{2^2}+\frac{\binom{2}{1}}{2^2}\times\frac{\binom{2}{2}}{2^2}=\frac{5}{16}$$

۲-یکی بیشتر از دیگری بزند؟

۳-به تعداد دفعات مساوی بزنند؟

7 تمارین پایانی فصل

مثال ۶۲) یک تاس را ۴ بار متوالی پرتاب می کنیم. اگر حداقل ۱ بار عدد ۶ بیاید، احتمال آن را بیابید که حداکثر ۳ بار بیاید؟

$$P(x\le ۳ | x\ge ۱)=\frac{P(۱\le x\le ۳)}{P(x\ge ۱)}=\frac{۶۷۰}{۶۷۱}$$

$$P(۱\le x\le ۳)=۱-P(x=۰)-P(x=۴)=۱-\left(\frac{۵}{۶}\right)^۴-\left(\frac{۱}{۶}\right)^۴=\frac{۳۳۵}{۶۴۸}$$

$$P(x\ge ۱)=۱-P(x=۰)=۱-\left(\frac{۵}{۶}\right)^۴=\frac{۶۷۱}{۱۲۹۶}$$

مثال ۶۳) دو بسکتبالیست A,B هر یک ۳ پرتاب به سمت حلقه می‌نمایند. احتمال آن را بیابید که یکی ۲ توپ و دیگری حداکثر ۲ توپ را داخل حلقه بیاندازند؟

$$P(x\le ۲)=۱-P(x=۳)$$

$$P=P_A(x=۲)P_B(x\le ۲)+P_A(x\le ۲)P_B(x=۲)-P_A(x=۲)P_B(x=۲)$$

$$=\frac{\binom{۳}{۲}}{۲^۳}\times\left(۱-\frac{\binom{۳}{۳}}{۲^۳}\right)\times ۲-\frac{\binom{۳}{۲}}{۲^۳}\times\frac{\binom{۳}{۲}}{۲^۳}=\frac{۳}{۸}\times\frac{۷}{۸}\times ۲-\left(\frac{۳}{۸}\right)^۲=\frac{۳۳}{۶۴}$$

مثال ۶۴) یک تاس را آن قدر پرتاب می کنیم تا عدد ۶ ظاهر شود، احتمال آنکه:

۱- در پرتاب سوم رخ دهد.

$$P=\frac{۵}{۶}\times\frac{۵}{۶}\times\frac{۱}{۶}=\frac{۲۵}{۲۱۶}$$

۲- در کمتر از ۴ پرتاب

$$P=\frac{۱}{۶}+\frac{۵}{۶}\frac{۱}{۶}+\left(\frac{۵}{۶}\right)^۲\frac{۱}{۶}=\frac{۹۱}{۲۱۶}$$

۳- پنجم به بعد رخ دهد.

$$P=\left(\frac{۵}{۶}\right)^۴\frac{۱}{۶}+\left(\frac{۵}{۶}\right)^۵\frac{۱}{۶}+....=\frac{\left(\frac{۵}{۶}\right)^۴\frac{۱}{۶}}{۱-\frac{۵}{۶}}=\left(\frac{۵}{۶}\right)^۴$$

راه دیگر :

۵- بدون هیچ شرطی !

$$P=\frac{۱}{۶}+\frac{۵}{۶}\frac{۱}{۶}+\left(\frac{۵}{۶}\right)^۲\frac{۱}{۶}+...=\frac{\frac{۱}{۶}}{۱-\frac{۵}{۶}}=۱\Rightarrow ۱۰۰٪$$

چی شده !!!!

مجموع جملات دنباله هندسی نامتناهی با قدر نسبت بین صفر تا یک

$$S_\infty=a+aq+aq^2+aq^3+.....=\frac{a}{1-q}\qquad ,0<q<1$$

8 متفرقه

۸-۱ احتمال شرطی

مثال ۶۵) فرض کنید B پیشامد با احتمال مثبت از فضای نمونه ای باشد . برای هر پیشامد دلخواه A ثابت کنید: $p(A)=p(B)p(A|B)+p(B')p(A|B')$

$$B\cup B'=S \quad , B\cap B'=\varnothing \to A=(A\cap B)\cup(A\cap B')\to$$
$$p(A)=p(A\cap B)+p(A\cap B')=p(B)p(A|B)+p(B')p(A|B')$$

مثال ۶۶) از هر ۱۰۰۰ متهم ۱ نفر مجرم است. اگر توسط یک قاضی که احتمال خطای آن ۱۰٪ است شخصی مجرم شناخته گردد ، احتمال آنکه واقعا مجرم باشد، چقدر است؟

$$p(T|X)=\frac{p(X|T)\times p(T)}{p(X|T)\times p(T)+p(X|F)\times p(F)}=\frac{\frac{90}{100}\times\frac{1}{1000}}{\frac{90}{100}\times\frac{1}{1000}+\frac{10}{100}\times\frac{999}{1000}}=\frac{1}{112}$$

مثال ۶۷) یک تاس را آن قدر پرتاب می کنیم تا عدد مضرب ۳ ظاهر گردد. اگر بدانیم، تاس را بیش از ۵ بار انداختیم. احتمال آنکه بیش از ۷ بار انداخته باشیم چقدر است؟

راه ۱: $P(A)=\frac{۲}{۶}=\frac{۱}{۳}$

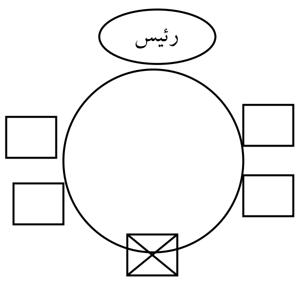
باید ۶ و ۷ را موفق نشده باشیم $\leftarrow P(A')P(A')=\frac{۴}{۹}$

راه ۲: $P(x\geq ۸|x\geq ۶)=\frac{P(x\geq ۸)}{P(x\geq ۶)}=......$

مثال ۶۸) در پرتاب ۳ تاس اگر حداقل دو تاس یکسان آمده باشند، احتمال آنکه هر سه یکسان آمده باشند چقدر است؟

مثال ۶۹) رئیس و منشی و ۴ کارمند دور یک میز نشستند، اگر رئیس و منشی روبروی هم نباشند با کدام احتمال صندلی منشی کنار صندلی مدیر است؟

$$P(A|B)=\frac{n(A\cap B)}{n(B)}=\frac{۲\times ۴!}{۵!-۴!}$$



مثال ۷۰) ۵ مهره سفید با شماره های ۱ تا ۵ و هم چنین ۵ مهره سیاه با شماره های ۱ تا ۵ را در ظرفی می ریزیم. به تصادف ۵ مهره از آن بیرون می آوریم اگر مجموع اعداد رو شده ۶ باشد با کدام احتمال مهره ها همرنگ هستند؟

$1+5=6: BB - WW - BW - WB \ (4-2)$

$4+2=6: BB - WW - BW - WB \ (4-2)$

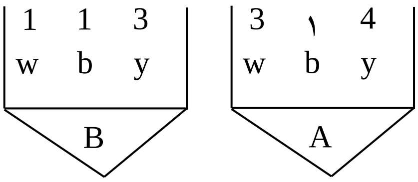
$3+3=6: BW \ (1-0)$

$$\frac{2+2+0}{4+4+1}=\frac{4}{9}$$

۸-۲ متفرقه احتمال کل و بیز

مثال ۷۱) یک سوم اتوموبیل های عرضه شده در یک نمایشگاه اتومات می‌باشند و ۰/۴ ماشین های اتومات و ۰/۷۵ ماشین های دستی دارای سانروف هستند. اتوموبیلی به تصادف انتخاب می گردد. اگر فاقد سانروف باشد ، احتمال دستی بودنش چقدر است؟

مثال ۷۲) با توجه به ظرف های زیر از A یک مهره بر می‌داریم و در B قرار می‌دهیم و سپس یک مهره از B برمی‌داریم :



۱- چقدر احتمال دارد که سفید نباشد؟

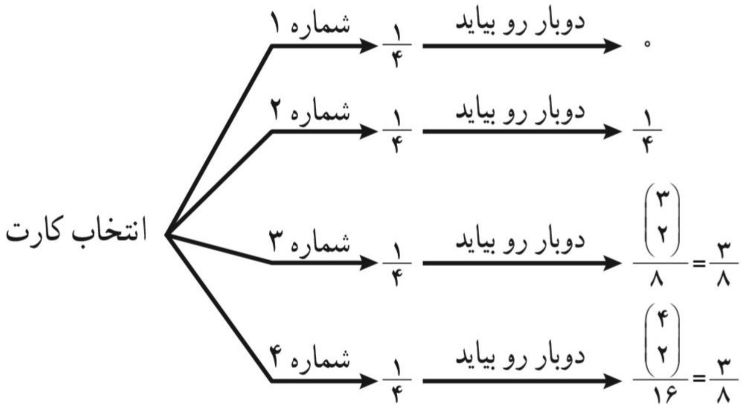
۲- اگر سفید نباشد، احتمال آنکه مهره انتقالی زرد باشد، چقدر است؟

۳- اگر سفید نباشد احتمال آنکه مهره انتقالی سیاه نباشد، چقدر است ؟

۸-۳ چند تمرین کتاب

۱۸ فرض کنید از بین چهار کارت با شماره‌های ۱ تا ۴ کارتی را به‌تصادف انتخاب می‌کنیم و سپس سکه‌ای را به تعداد عدد کارت پرتاب می‌کنیم. اگر ۲ بار رو بیاید، احتمال اینکه شمارهٔ کارت خارج شده ۳ باشد چقدر است؟

۱۸ باید P (۲ بار رو بیاید | شماره کارت ۳ باشد) را محاسبه کنیم. از قانون بیز و نمودار درختی زیر استفاده می‌کنیم.



بنابراین :

$$P\,(\text{شماره کارت ۳ باشد}\,|\,\text{۲ بار رو بیاید}) = \frac{P\,(\text{۲بار روبیاید}\,|\,\text{شماره کارت ۳ باشد})\;P\,(\text{شماره کارت ۳ باشد})}{P\,(\text{۲ بار روبیاید})}$$

$$=\frac{\frac{1}{4}\times\frac{3}{8}}{\frac{1}{4}\times 0+\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\times\frac{3}{8}+\frac{1}{4}\times\frac{3}{8}}=\frac{3}{8}$$

۱۹ یک شرکت بیمه، بیمه‌گزاران خود را به دو گروه تقسیم کرده است؛ گروه «پرخطر» که در یک سال با احتمال ۰/۴ تصادف می‌کنند و گروه «کم‌خطر» که احتمال تصادف کردن آنها در یک سال ۰/۲ است. می‌دانیم که ۳۰ درصد بیمه‌گزاران پرخطرند.

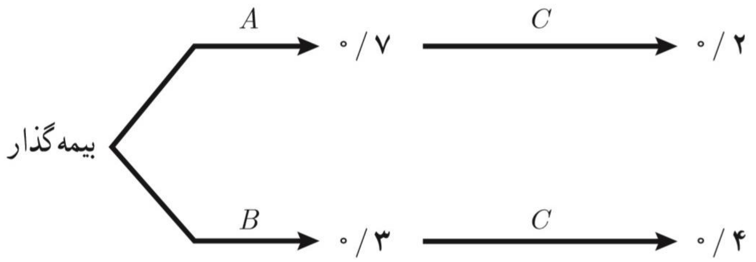
الف) احتمال اینکه یک بیمه‌گزار در سال آینده تصادف کند را به دست آورید.

ب) اگر یک بیمه‌گزار در سال گذشته تصادف کرده باشد، احتمال اینکه جزء گروه پرخطر باشد چقدر است؟

۱۹ اگر A و B پیشامد بیمه‌گذاران کم‌خطر و پرخطر باشد، سپس $P(A)=۰/۷$ و $P(B)=۰/۳$

اکنون اگر C پیشامد تصادف کردن باشد،

الف) به کمک نمودار درختی زیر، $P(C)$ را به‌دست آوریم.



$$P(C)=۰/۷\times ۰/۲+۰/۳\times ۰/۴=۰/۲۶$$

ب) برای محاسبه $P(B|C)$ از قانون بیز استفاده می‌کنیم.

$$P(B|C)=\frac{P(B)P(C|B)}{P(C)}=\frac{۰/۳\times ۰/۴}{۰/۲۶}=\frac{۰/۱۲}{۰/۲۶}=\frac{۶}{۱۳}$$

---

۱۲ اگر A و B دو پیشامد مستقل باشند به‌طوری که $P(A\cap B)=۰/۱$ و $P(A\cap B')=۰/۴$، حاصل $P(A\cup B')$ را به‌دست آورید.

۱۲ با توجه به اینکه $P(A\cap B')=P(A-B)=P(A)-P(A\cap B)$، پس $۰/۰۴=P(A)-۰/۱$ بنابراین $P(A)=۰/۱۴$. همچنین $P(A\cap B)=P(A)P(B)$، پس $۰/۱=۰/۱۴\times P(B)$ و $P(B)=۰/۷۱$ به‌دست می‌آید. بنابراین:

$$P(A\cup B')=P(A)+P(B')-P(A\cap B')=۰/۱۴+۰/۲۹-۰/۰۴=۰/۳۹$$

۸-۴ دیگر مسائل

مثال ۷۳) در پرتاب ۴ سکه باهم احتمال آن رابیابید که فقط ۳ سکه رو بیاید یا فقط ۳ سکه پشت بیاید؟

مثال ۷۴) احتمال انتقال نوعی بیماری به یک فرد مستعد ۵۰٪ است. این بیمار حداقل باید با چند نفر ملاقات کند تا احتمال انتقال بیماری به دست کم یک نفر بیش از ۰/۹۹۵ باشد ؟

$$۱-\left(\frac{۱}{۲}\right)^n > \frac{۹۹۵}{۱۰۰۰} \to \frac{۱}{۲^n} < \frac{۱}{۲۰۰} \to ۲^n > ۲۰۰ \quad \to Min(n) = ۸$$

مثال ۷۵) سکه‌ای را ۱۰ بار پرتاب می‌کنیم. احتمال آنکه تا پرتاب ۶ ام حداقل یک بار رو بیاید و در مابقی پرتاب ها حداکثر ۳ بار این اتفاق بیافتد، چقدر است ؟

مثال ۷۶) از یک ظرف شامل ۱ مهره سفید و ۹ مهره سیاه به تصادف و با جایگذاری آنقدر مهره خارج می کنیم تا مهره سفید بیرون آید. احتمال آنکه از برداشت سوم به بعد رخ دهد، چقدر است ؟

$$P(x \geq ۳) = ۱ - \left[P(x = ۱) + P(x = ۲)\right]$$
$$= ۱ - \left(\frac{۱}{۱۰} + \frac{۹}{۱۰} \times \frac{۱}{۱۰}\right) = ۱ - \frac{۱۹}{۱۰۰} = \frac{۸۱}{۱۰۰}$$

مثال ۷۷) یک تاس را باید چند بار پرتاب کنیم تا احتمال ظاهر شدن یک عدد اول برای سومین بار در پرتاب آخر برابر $\frac{۳}{۱۶}$ باشد؟

۱) ۳   ۲) ۵   ۳) ۶   ۴) ۷

$$A = \{۲,۳,۵\} \to P(A) = \frac{۳}{۶} = \frac{۱}{۲}$$
$$p = \binom{n-۱}{۳-۱} \times \left(\frac{۱}{۲}\right)^n = \frac{۳}{۱۶} \to n = ۵$$

۸-۵ چند مطلب ویژه ریاضی

۸-۵-۱ یک مورد خوفناک از کتاب ریاضی که حذف شد !

نکته! : فرض کنید $B\,,C$ دو پیشامد ناسازگار(⎈) باشند و $p(A|B)\le p(A|C)$ آنگاه داریم :

$$p(A|B)\le p(A|(B\cup C))\le p(A|C)$$

از قبل می دانیم که اگر $\frac{a}{b}\le\frac{c}{d}$، سپس $\frac{a}{b}\le\frac{a+c}{b+d}\le\frac{c}{d}$. به کمک این خاصیت داریم:

$$P(A|B)\le P(A|C)\Rightarrow\frac{P(A\cap B)}{P(B)}\le\frac{P(A\cap C)}{P(C)}\Rightarrow$$

$$\frac{P(A\cap B)}{P(B)}\le\frac{P(A\cap B)+P(A\cap C)}{P(B)+P(C)}\le\frac{P(A\cap C)}{P(C)}$$

$$(⎈)\ \ P(A|B)\le\frac{P((A\cap B)\cup(A\cap C))}{P(B\cup C)}\le P(A|C)\Rightarrow$$

$$P(A|B)\le\frac{P(A\cap(B\cup C))}{P(B\cup C)}\le P(A|C)\quad\Rightarrow P(A|B)\le P(A|B\cup C)\le P(A|C)$$

۸-۵-۲ اثبات قانون ضرب احتمال سه تایی

$$p(A_1\cap A_2\cap A_3)=p(A_1)\times p(A_2|A_1)\times p(A_3|(A_1\cap A_2))$$

اثبات: از طرف دوم شروع می کنیم، داریم:

$$P(A_1),P(A_2)|A_1)P(A_3|A_1\cap A_2))=$$

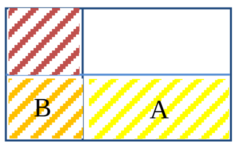
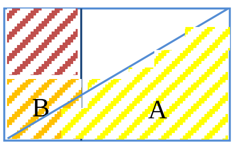
$$\cancel{P(A_1)}.\frac{P(\cancel{A_2\cap A_1})}{\cancel{P(A_1)}}.\frac{P(A_3\cap(A_1\cap A_2))}{\cancel{P(A_2\cap A_1)}}=P(A_1\cap A_2\cap A_3)$$

این قانون برای n پیشامد A۱، A۲ و ..... و An با احتمال های مثبت از فضای نمونه ای S نیز قابل تعمیم است.

۸-۵-۳ نگاهی متفاوت به استقلال پیشامدها

می خواهیم مفهوم عمیق مستقل بودن دو پیشامد A و B از یک فضای نمونه را درک کنیم. واقعیت این است که دو پیشامد A و B از فضای نمونه ی S مستقل اند هرگاه اگر پیشامد B درصد به خصوصی از فضای نمونه را اشغال کرده باشد، همان درصد به خصوص از پیشامد A را نیز اشغال کرده باشد یا برعکس اگر A درصد به خصوصی از S را اشغال کرده است. همان درصد از B را نیز اشغال کند.

اگر A، ۳۰ درصد از فضای نمونه را در اختیار دارد، در صورتی با B مستقل است که ۳۰ درصد از B را هم در اختیار داشته باشد؛ به دونمودار مفهومی زیر دقت کنید:

B,A مستقل اند	B,A وابسته اند
	
پیشامد A نصف سطح فضای نمونه و هم چنین نصف سطح B را در اختیار دارد.	پیشامد A نصف سطح فضای نمونه را در اختیار دارد اما نصف B را در اختیار ندارد.

۴-۵-۸ چند مثال خفن و قدیمی

مثال ۷۸)تاس سالمی را افراد ۱ و ۲ و۳ به ترتیب پرتاب می‌کنند. اولین شخصی که ۶ بیارد برنده این بازیست. احتمال آنکه شخص ۱ ببرد چند برابر شخص آخر است ؟

$$\frac{1}{6}+(\frac{5}{6}\times\frac{5}{6}\times\frac{5}{6})\times\frac{1}{6}+(\frac{5}{6}\times\frac{5}{6}\times\frac{5}{6})\times(\frac{5}{6}\times\frac{5}{6}\times\frac{5}{6})\times\frac{1}{6}+.......=$$

$$\frac{1}{6}+(\frac{5}{6})^3\frac{1}{6}+(\frac{5}{6})^6\frac{1}{6}+(\frac{5}{6})^9\frac{1}{6}+......=\frac{\frac{1}{6}}{1-(\frac{5}{6})^3}=...$$

مثال ۷۹) از هر ۱۰۰ کامپیوتر موجود در یک اداره ۵ تا آلوده به ویروس است، اگر توسط یک مهندس کامپیوتر که احتمال خطای ٪۲۰ دارد، کامپیوتری سالم تشخیص داده شود، چقدر احتمال دارد آلوده به ویروس باشد؟

مثال ۸۰) در یک ایستگاه مخابراتی نسبت ارسال نقطه به خط ۴ به ۸ است. اگر در مقصد هر خط با احتمال ٪۴۰ به نقطه و هر نقطه با احتمال یک سوم به خط تبدیل گردد، احتمال انکه نقطه ای که در مقصد دریافت شده باشد، از مبدا خط ارسال شده باشد، چقدر است ؟

$$\frac{\frac{۲}{۳}\times\frac{۲}{۵}}{\frac{۱}{۳}\times\frac{۲}{۳}+\frac{۲}{۳}\times\frac{۲}{۵}}=\frac{۶}{۱۱}$$

9 کاردرخانه

10 یادداشت

امیر وفائی

مدرس ریاضیات دوره دوم متوسطه از پایه تا کنکور – متخصص هر دو رشته ریاضی و تجربی

طراح سوالات همه شاخه های ریاضی کانون فرهنگی آموزش (قلمچی)

رتبه ۲۶ کنکور سراسری

نفر اول دوره کارشناسی و کارشناسی ارشد مهندسی عمران دانشگاه صنعتی شریف

پذیرفته شده دوره دکتری مستقیم مهندسی عمران دانشگاه صنعتی شریف

رکوردار معدل دانشکده عمران دانشگاه صنعتی شریف از بدو تاسیس تا کنون

کسب عنوان دانشجوی نمونه دانشکده عمران و دانشگاه صنعتی شریف در سال ۱۳۹٤ و ۱۳۹٥

سابقه بیش از ۱۰ ترم استادیاری (دستیار استاد) در دروس مختلف تخصصی و عمومی دانشگاه صنعتی شریف

گذراندن دوره فرعی رشته ریاضی دانشگاه صنعتی شریف

استاد حل تمرین ریاضی دانشگاه صنعتی شریف

حضور در مدرسه شهیدبشهتی ۱ (تیزهوشان) از سال ۹۲ به عنوان مشاور و مدرس ریاضی

تالیف کتاب تا کنکور با همکاری مدرسه تیزهوشان

مبتکر برنامه های جمعبندی ویژه ۱۰۰-۱۰۰ در همه پایه ها با مشابهت ۱۰۰ درصدی در کنکور سراسری

آموزش مفهومی و متفاوت درس ریاضی منطبق بر برنامه دقیق تدریس و آزمون و برنامه تست

مدرس رتبه های برتر (تک رقمی و دو رقمی)

AMIRVAFAEI6

www.Donat.Academy