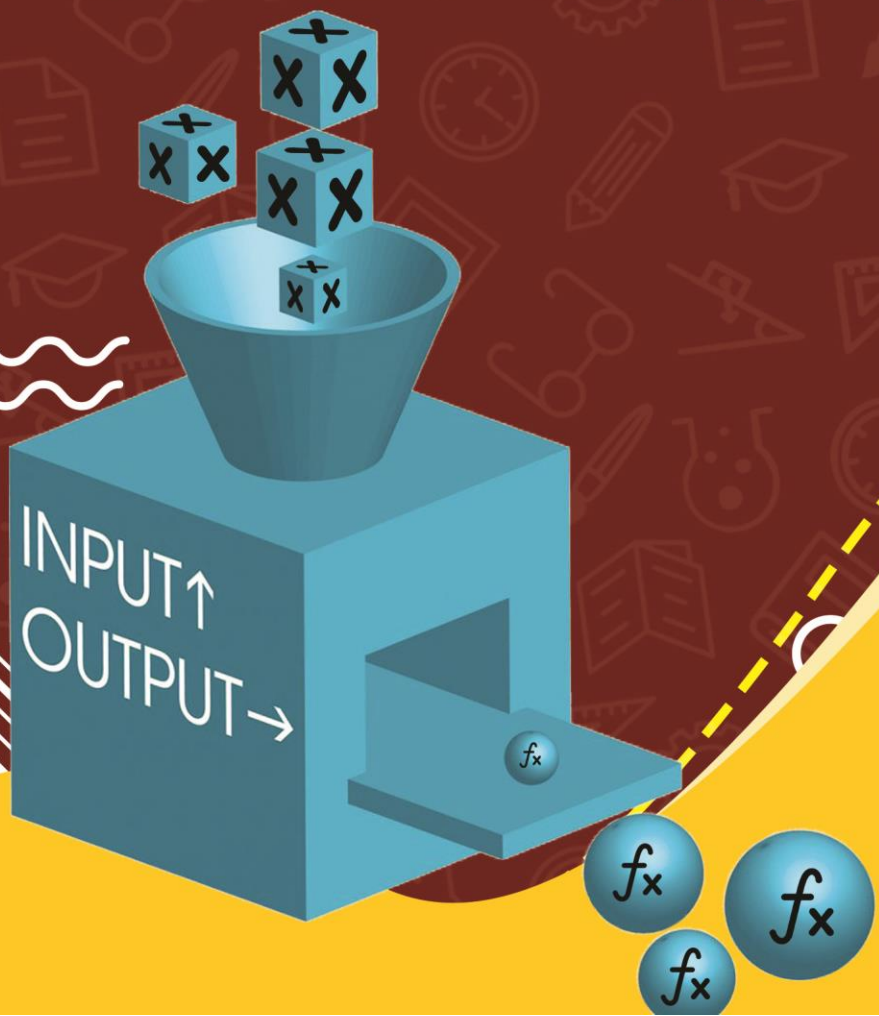
آموزش تخصصی ریاضیات

امیر وفائی

جزوات آموزش ریاضی

تابع

- فصل پنجم
- ریاضی و تجربی ۱۰



@vafaei_math

AmirVafaei6

0936 879 1709

www.Donat.academy

فهرست مطالب

۱ تعاریف اولیه

۱-۱حاصل ضرب دکارتی یا کارتزین $A\times B$

به تمام ارتباطات از مجموعه A به مجموعه B که به شکل مجموعه‌ای از زوج‌های مرتب تشکیل می‌شود.
$$A\times B=\{(a,b)\mid a\in A, b\in B\}$$

تذکر ۱) **دو زوج مرتب وقتی باهم برابرند که هر دو مولفه‌ی آنها نظیر به نظیر باهم برابر باشند.**

مثال ۱) اگر $A=\{۴,۵\}$ و $B=\{۱,۲,۳\}$ کارتزین‌های زیر را بیان کنید.

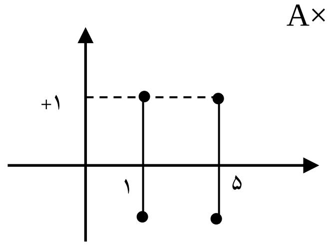
۱) $A\times B$
$$A\times B=\{(۴,۱),(۴,۲),(۴,۳),(۵,۱),(۵,۲),(۵,۳)\}$$

۲) $B\times A$
$$B\times A=\{(۱,۴),(۱,۵),(۲,۴),(۲,۵),(۳,۴),(۳,۵)\}$$

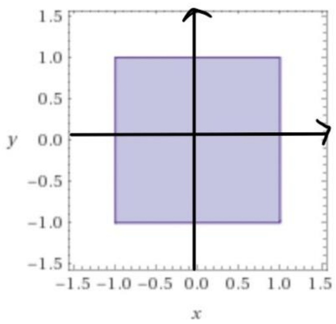
۳) $A\times A=A^{۲}$
$$A^{۲}=\{\qquad\qquad\}$$

مثال ۲) اگر $A=\{۱,۵\}$ و $B=[-۱,۱]$ مطلوبست کارتزین های زیر:

۱) A×B

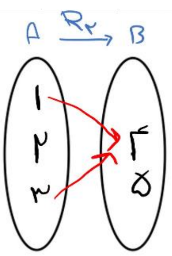


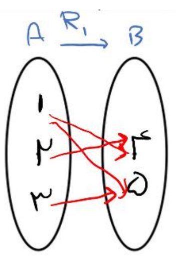
۲) $B^{۲}$



۱-۲ رابطه

به مجموعه دلخواهی از زوج‌مرتب‌ها که مولفه اول آن‌ها در مجموعه A و مولفه دوم آن‌ها در B قرار داشته‌باشد، یک رابطه از مجموعه A به مجموعه B گفته می‌شود. به عنوان مثال دو رابطه زیر از مجموعه A به مجموعه B نوشته شده‌است. همچنین نمایش نموداری رابطه‌ها که نمودار ون(پیکانی) نام دارد، در شکل آمده‌است.



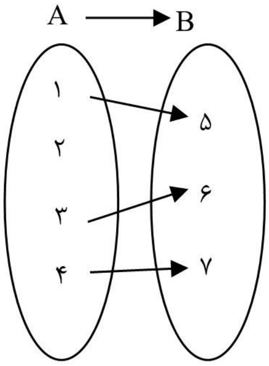


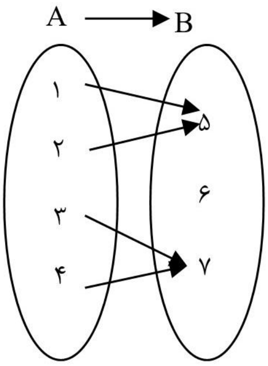
$$A=\{۱,۲,۳\}\quad B=\{۴,۵\}\qquad R۱=\{(۱,۴),(۱,۵),(۲,۴),(۳,۵)\},\ R۲=\{(۱,۴),(۳,۴)\}$$

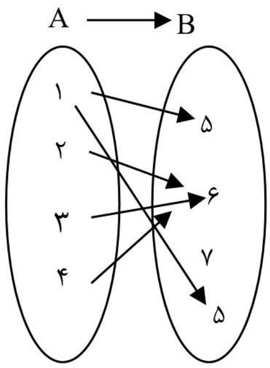
۱-۳ تابع

تابع f از مجموعه A به مجموعه B رابطه‌ای است از این دو مجموعه که دارای هیچ دو زوج مرتب متمایزی با مولفه اول یکسان نباشد و علاوه بر آن لازم است که به هر عضو A ، عضوی از B نسبت داده شود و به شکل $f: A\to B$ نمایش می‌دهند. به طور خلاصه‌تر :

یک تابع از مجموعه A به مجموعه B رابطه‌ای است از این دو مجموعه که در آن به هر عضو A دقیقاً یک عضو B نسبت داده شود.







تذکـــر ۲) چند نکته مهم

دلیلی ندارد که به هر عضو B یک عضو از A نسبت دهیم.

امکان دارد به یک عضو B چند عضو از A نسبت دهیم.

از هر عضو A باید یک پیکان خارج شود و اگر چند پیکان خارج شده باشد، باید همه به یک عضو ختم شوند.

اگر از A پیکانی خارج نشود (حتی یک عضو آن)، آن رابطه، تابع نمی‌باشد.

۲ بررسی تابع بودن

هر تابع را می‌توان به ٦ روش نمایش جدولی، توصیف کلامی، نمودار ون، مجموعه‌ای، نمودار مختصاتی و ضابطه‌ای نمایش داد که الگوریتم بررسی تابع بودن در هر روش الگوریتم خاص خود را دارد.

۲-۱ نمایش جدولی

ساعت	۸	۹	۱۰	۱۱
دما	۱۵	۱۶	۱۷	۱۷

اگر هیچ یک از اعداد سطر بالای جدول (مولفه های اول) یکسان نباشد.

۲-۲ نمایش توصیف کلامی

هرگاه تابع توصیف شده شرایط تعریف تابع را داشته باشد، آن توصیف بیانگر یک تابع می باشد.

اگر دستگاهی در مساله بیان شده باشد هرگاه خروجی قابل پیش بینی داشته باشد معرف یک تابع می باشد.

۱- رابطه بین انسان و گروه خونی : نسبت دادن گروه خون به انسان هست ولی برعکس خیر.

۲- رابطه مجموعه اعداد مثبت با ریشه ی دومشان : خیر ٤ ← ۲ ±

۳- رابطه دانش آموز و نمرات در کارنامه آنها: خیر هر دانش آموز چند تا نمره دارد.

٤- رابطه بین تمام افراد ایرانی و رنگ ماشین آن ها : خیر شاید چند تا ماشین داشته باشد یا ....

۵- دستگاه آب میوه گیری : هست (خروجی قابل پیش بینی)

۲-۳ نمایش نمودار ون یا پیکانی

چه وقت تابع نیست!

۱. هرگاه از یکی از اعضای مجموعه اول ۲ پیکان مختلف خارج گردد.

۲. هرگاه عضو یا اعضایی از مجموعه اول وجود داشته باشند که پیکانی از آن‌ها خارج نشده باشد

مثال بالای صفحه !

۲-٤ نمایش مجموعه ای

بد نیست بدانیم تابع بودن شامل ۲ چک کلی می گردد :

یک: به همه اعضای A (مجموعه اول) ، یک عضو نسبت دهیم. (اگر در مساله A را داده باشند)

دو: به کسی از اعضای A، دو عضو متمایز نسبت ندهیم.

چه وقت تابع نیست!

وقتی که ۲ یا چند زوج مرتب با عضو اول مشترک، عضو دوم متمایز داشته باشند.

مثال ۳) کدام یک از روابط زیر تابع می باشند؟

$$R_۱=\{(۲,۲),(۱,۲)\} \quad ، R_۲=\{(۱,۴),(۱,۲),(۲,۵)\} \quad ، R_۳=\{(۱,۲),(۲,۳),(۴,۲),(۳,۲),(۱,۲)\}$$

مثال ٤) به ازای کدام مقدار x رابطه زیر تابع می گردد؟

$$R_۱=\{(x,۴),(-۴,۱),(۲,۳),(۲,x^۲+۳x-۱)\}$$

$$۳=x^۲+۳x-۱ \Rightarrow x=+۱,-۴$$

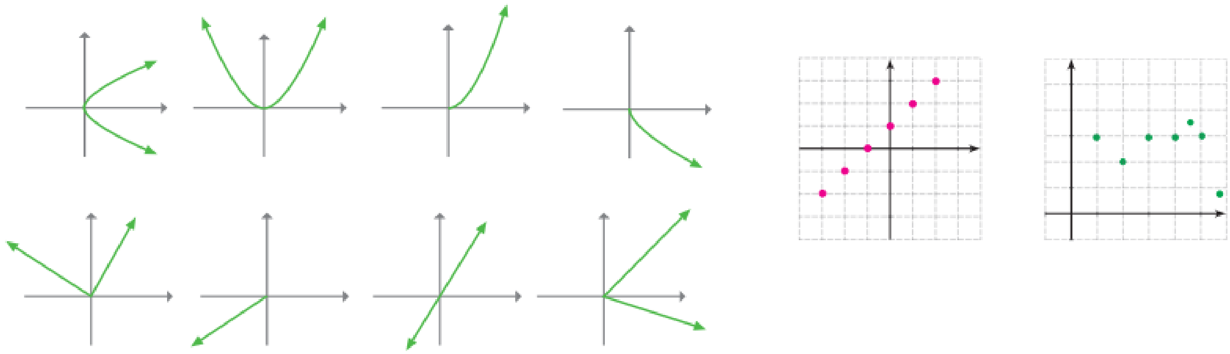
تذکر ۳) هرگاه در تابع زوج مرتبی چند زوج مرتب با مولفه اول یکسان دیده شد، حتماً این زوج‌ها مولفه دوم برابر نیز دارند!

۲-۵ نمایش نموداری یا تابع نموداری

چه وقت تابع نیست!

هرگاه خطی موازی محور yها (خروجی تابع) شکل تابع را در بیش از یک نقطه قطع کند.

مثال ۵) کدام یک از روابط زیر تابع می‌باشند؟



۲-٦ تابع ضابطه‌ای

چه وقت تابع نیست!

وقتی که برای یک ورودی، دو یا چند خروجی حاصل گردد. به چند روش می‌توان در این دسته عمل نمود.

۲-۶-۱ رسم نمودار

پس از رسم نمودار در صورت امکان، از بخش قبلی استفاده کن!

۲-۶-۲ روش مثال نقض

یعنی باید یک x خوب پیدا کنی که در نتیجه اون ۲ یا چند y حاصل بشه! مثلاً همیشه ۰ و ۱ و ۱- گزینه‌های خوبی هستند . و .....

مثــال ۶) کدام یک از روابط زیر تابع می‌باشند؟

$1)\ 2y^2-4y+3x=0$

$x=0 \Rightarrow 2y^2-4y=0 \to 2y(y-2)=0 \Rightarrow y=0,2 \to$ ....

$2)\ y^2-6y+x^2+2x+10=0$

$(y^2-6y+9)+(x^2+2x+1)=(y-3)^2+(x+1)^2=0 \to \left| \begin{array}{l} x=-1 \\ y=3 \end{array} \right.$ تابع تک نقطه ای

$3)\ |y-3|+|x|+7=0$

$|y-3|+|x|=-7 \quad (+=-)$!!!!!!

$4)\ |y-2|=\sqrt[6]{-x^2}$

تذکــر ۴) رابطه تهی یک تابع می‌باشد! همچنین یک رابطه یک نقطه‌ای معرف یک تابع تک عضویست!
(البته اگر مجموعه A مشخص گردد دیگر هیچ کدام تابع نیستند، به مورد بعدی توجه کن!

مورد ۲ : با در نظر گیری مجموعه اول اعداد صحیح :

تذکــر ۵) در مورد مثال نقض: اگر یک X بذاری و به یک یا هیچ Y برسی هیچ نتیجه ای نمیتونی بگیری و این روش صرفا برای نقض کردن می باشد و نه اثبات!

۲-۶-۳ روش اثبات تابع بودن(روش عمومی)

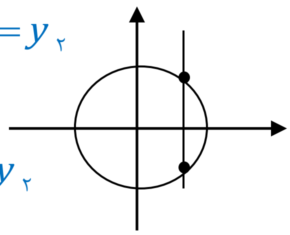
در این روش دو زوج (x1,y1) و (x2,y2) را در رابطه قرار می‌دهیم و باید از رابطه x1=x2 به رابطه y1=y2 برسیم تا اثبات شود که رابطه تابع می‌باشد. برای فهم کامل این روش به مثال‌ها و نکات زیر توجه کنید.

$1)\ x^4y^5=1$

$x^4=\dfrac{1}{y^5} \qquad x_1=x_2 \to x_1^4=x_2^4 \to \dfrac{1}{y_1^5}=\dfrac{1}{y_2^5} \to y_1^5=y_2^5 \to y_1=y_2$

$2)\ x^2+y^2=4 \Rightarrow$

$\to x_1=x_2 \to x_1^2=x_2^2 \to 4-y_1^2=4-y_2^2 \to y_1^2=y_2^2 \to y_1=\pm y_2$



۲-۶-٤ چند نکته و مثال مهم در خصوص تابع بودن

بررسی چند جمله ای و خط به عنوان تابع :

$f(x)=ax+b$

$x=۱$

$y=۱$

$f(x)=a_n x^n+a_{n-۱}x^{n-۱}+.....+a_۲x^۲+a_۱x+a_۰ \qquad f(x)=۳x^۴+x^۳-۴x+۶$

سه صورت زیر تابع نیستند !

$(x-a)^۲+(y-b)^۲=R^۲ \qquad \frac{(x-a)^۲}{c^۲}+\frac{(y-b)^۲}{d^۲}=۱ \qquad |x-a|+|y-b|=c\rangle۰$

یک مثال و نکته مهم

مثال ۷) آیا رابطه $y^۳+y=x+۲$ تابع است ؟

نکته خفن : رابطه $y^۳+ay=f(x)$ برای هر a مثبت، تابع هست .

تمرین : آیا میتوانید مثال ۷ را به روش تشریحی بررسی کنید ؟

تابع بودن یک رابطه چند ضابطه ای

اولاً باید هر رابطه در محدوده تعریف خود یک تابع باشد.

دوماً باید در نقاط مشترک دامنه ها، خروجی تابع محاسبه شود و اگر اعداد بدست آمده برابر بودند رابطه داده شده تابع هست و در غیر اینصورت تابع نیست.

مثال ۸) تابع بودن رابطه دو ضابطه ای مقابل را بررسی کنید.

$$f(x)=\begin{cases} x^۲+۱ , & x\geq ۱ \\ ۲x , & x\leq ۱ \end{cases}$$

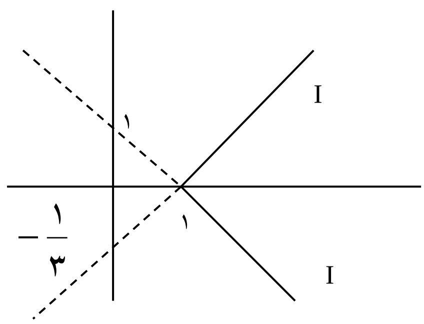
مثال ۹) کدام گزینه Y تابعی از x می باشد؟

۱) $x=y+۲|y|+۱$

۲) $x=۲y+|y|+۱$

۳) $x^۲+y^۲+۲y=۱ \qquad \Rightarrow x=۱\to y^۲+۲y=۰\to y(y+۲)=۰$

۴) $x^۲+y^۲+۲x=۱ \qquad \Rightarrow x=۰\to y^۲=۱\to y=\pm۱$

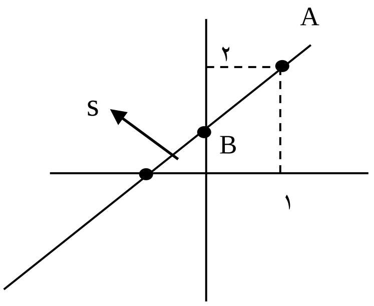


۳ مدل‌سازی ریاضی به کمک توابع

مفهوم در این قسمت این است که جملات فارسی را به عبارات ریاضی به شکل یک سری روابط بنویسیم که منتج به یک تابع شوند.با حل دو مثال این موضوع را بیان می‌کنیم. این بخش کاربرد زیادی در حل مسائل بهینه‌سازی دارد.

مثال ۱۰) اختلاف دو عدد ۱۲ می‌باشد. حاصل ضرب آن‌ها را به شکل تابعی از عدد کوچکتر بنویسید.

مثال ۱۱) در شکل زیر خط گذرنده از نقطه A با شیب m در ناحیه دوم با محورهای مختصات مثلثی با مساحت s می‌سازد. تابع s را برحسب m بیان کنید.



$y-y_{\circ}=m(x-x_{\circ})$

$y-۲=m(x-۱)\Rightarrow y=mx+۲-m$

کافیست طول و عرض از مبدا را محاسبه کنیم.

$y=\circ\rightarrow x=\dfrac{m-۲}{m}<\circ$ خط با شیب مثبت : m>0

$x=\circ\rightarrow y=۲-m>\circ$

$$S=\frac{۱}{۲}\times\frac{m-۲}{m}\times(۲-m)=-\frac{(m-۲)^۲}{۲m}<\circ\ \ !!!\Rightarrow S=\frac{(m-۲)^۲}{۲m}$$

٤ تابع خطی

$y=f(x)=ax+b\Rightarrow a$: شیب خط و b= عرض ازمبدا

$y=f(x)=ax\rightarrow f(tx)=tf(x),\ f(x_۱+x_۲)=f(x_۱)+f(x_۲)$

$f(tx)=a(tx)=t(ax)=tf(x)$

مثال ۱۲) اگر f(x) تابع خطی باشد و در مورد آن بدانیم $۳f(x+۲)-f(x)=۲x+۱۰$، ضابطه ی آن را پیدا کنید.

$f(x)=ax+b\rightarrow f(x+۲)=a(x+۲)+b=ax+۲a+b$

$\rightarrow ۳f(x+۲)-f(x)=۳ax+۶a+۳b-(ax+b)=۲ax+۶a+۲b=۲x+۱۰$

$\rightarrow ۲a=۲,۶a+۲b=۱۰$

مثال ۱۳) مقدار c را طوری تعیین کنید که تابع $\{(۱,c),(۲,۱),(۳,۴)\}$ یک تابع خطی باشد.

۵ سه ویژگی اساسی تابع(دامنه- همدامنه - برد)

با فرض وجود تابع f از مجموعه A به B

۵-۱ تعاریف

- دامنه: به مجموعه تمام مولفه‌های اول زوج مرتب‌های تابع f دامنه تابع با نماد D_f گویند.
  که معادل مجموعه A می‌باشد. $D_f=\{x \mid (x,y)\in f\}$
- برد: به مجموعه تمام مولفه‌های دوم زوج مرتب‌های تابع f برد تابع با نماد R_f گویندرد
  واقع برد زیر مجموعه‌ای از هم‌دامنه می‌باشد ! $R_f=\{y \mid (x,y)\in f\}$
- ضابطه: به یک نوع رابطه که بین ورودی و خروجی تابع برقرار می‌گردد ضابطه گفته می‌شود و در واقع عبارت ریاضی یک تابع همان ضابطه آن می‌باشد.
- هم‌دامنه: به مجموعه دوم یا مجموعه پایان یک تابع هم‌دامنه گویند که همان مجموعه B می‌باشد و تمام مولفه دوم‌ها از آن‌جا انتخاب می‌گردند.(هر مجموعه دلخواه شامل................................... ....)

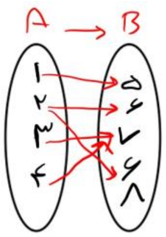
۵-۲ محاسبه دامنه و برد

- تعریف زوج مرتبی:

$$f=\{(۲,۳),(۴,۲),(۳,۲),(۱,۲)\}$$

$D_f=$ $\qquad\qquad$ $R_f=$

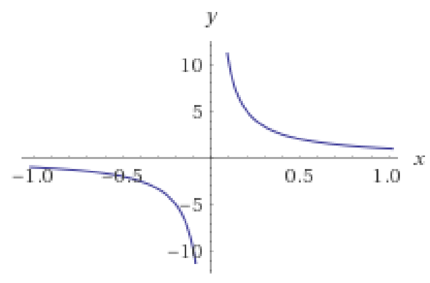
- نمودار ون:

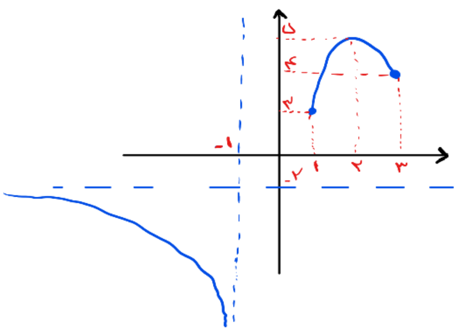


$D_f=$

$R_f=$

- نمودار مختصاتی: تصویر نقاط نمودار بر روی محور x ها مجموعه نقاط دامنه را تشکیل می‌دهد و بر محور y ها مجموعه نقاط برد را تشکیل می دهد.





- از روی ضابطه

مثال ۱٤) دامنه و برد تابع چند ضابطه‌ای زیر را بدست آورید.(تابع علامت یا sgn)

$$f(x)=\begin{cases} ۱ & x>۰ \\ ۰ & x=۰ \\ -۱ & x<۰ \end{cases}$$

حال به کمک تقسیم بندی زیر با روش‌های مختلف محاسبه دامنه و برد از روی ضابطه آشنا می‌شویم.

۵-۲-۱ توابع چند جمله‌ای

صورت کلی یک تابع چند جمله‌ای به فرم زیر می‌باشد که a1 تا an اعداد حقیقی و n یک عدد طبیعی می‌باشد.
$f(x)=a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1}+.....+a_2 x^2 + a_1 x + a_0$

دامنه این توابع اگر ذکر نشود، مجموعه اعداد حقیقی می‌باشد و برد آن‌ها با حل کردن x بر حسب y و برقراری شرط x معین می‌گردد. این روش، روش اساسی محاسبه برد نام دارد!

مثال ۱۵) دامنه و برد تابع زیر را بدست آورید.

$y=f(x)=x+1$

$D_f=\mathbb{R}$

$D_f=[2,6]$

$y=f(x)=-x^2+1 \Rightarrow D_f=\mathbb{R}$

$R_f \Rightarrow y=-x^2+1 \Rightarrow y-1=-x^2 \le 0 \rightarrow y-1 \le 0 \rightarrow y \le 1 \rightarrow R_f=(-\infty,1]$

۵-۲-۲ توابع گویا

هر تابع به شکل $f(x)=\dfrac{p(x)}{q(x)}$ که در آن $p(x)$ و $q(x)$ یک چند جمله ای باشند را تابع گویا گویند. طبیعیست که باید مراقب مخرج کسر باشید !

مثال ۱۶) دامنه و برد تابع زیر را به دست آورید.

$y=f(x)=\dfrac{x+2}{x^2-4}$

$D_f=\mathbb{R}-\{-2,2\}$ ساده DONT

$R_f \rightarrow y=\dfrac{1}{x-2}$ ساده Must

$y=\dfrac{1}{x-2} \rightarrow x-2=\dfrac{1}{y} \rightarrow x=\dfrac{1}{y}+2=\dfrac{2y+1}{y} \rightarrow y \ne 0$

$x \ne -2 \Rightarrow y \ne \dfrac{1}{-2-2}=-\dfrac{1}{4} \Rightarrow R_f=\mathbb{R}-\{0,-\dfrac{1}{4}\}$

تذکر ۶) تابع $\dfrac{1}{x}$ دامنه و برد برابر با $\mathbb{R}-\{0\}$ دارد!

تذکر ۷) تابع ساده شدنی: در این توابع باید دقت نمود که ریشه های مخرج که ساده شدند را از صورت نهایی برای محاسبه برد خارج نمائیم.

تذکر ۸) تمام توابع چند جمله‌ای درجه فردی که دامنه محدود نداشته باشند برد شان مجموعه اعداد حقیقی می‌باشد

تذکر ۹) در محاسبه دامنه ساده سازی ممنوع می باشد ولی در محاسبه برد بدمان نمی آید!

مثال ۱۷) دامنه و برد تابع زیر را بدست آورید

$$y=f(x)=\frac{x^{2}+1}{x^{2}-1}$$

$$yx^{2}-y=x^{2}+1\Rightarrow yx^{2}-x^{2}=y+1$$

$$\rightarrow x^{2}(y-1)=y+1\rightarrow x^{2}=\frac{y+1}{y-1}\geq 0\Rightarrow y\neq 1,\frac{y+1}{y-1}\geq 0$$

$$\frac{y+1}{y-1}\geq 0\rightarrow y>1 \text{ or } y\leq -1\Rightarrow R_f=(-\infty,-1]\cup(1,+\infty)$$

۳-۲-۵ توابع اصم (گنگ- رادیکالی)

توابعی را اصم گویند که متغیر x آن‌ها زیر رادیکال باشد، به عبارت دیگر توان x یا عبارت بر حسب x کسری می‌باشد. شکل عمومی: $y=f(x)=\sqrt[n]{p(x)}$

اگر n فرد باشد و p یک چند جمله‌ای دامنه برابر R می‌باشد و اگر **n زوج** باشد، **زیر رادیکال نباید منفی باشد.**

برای تعیین برد از روش اساسی استفاده می‌گردد.

مثال ۱۸) دامنه و برد توابع زیر را بدست آورید.

$$y=f(x)=\sqrt{x^{2}-4x+5}$$

فقط دامنه

$$y=f(x)=\sqrt{\frac{x^{2}-3x}{-x^{2}+2x+3}}$$

٤-۲-۵ تیپ نامساوی ها

سه مثال و نکته زیر را در یابید !

مثال ۱۹) برد $y=f(x)=\frac{2x^{4}+4}{\sqrt{x^{4}+1}}$ تابع را بدست آورید

$$u<0\rightarrow u+\frac{1}{u}\leq -2 \qquad u>0\rightarrow u+\frac{1}{u}\geq 2$$

$$y=2\frac{x^{4}+2}{\sqrt{x^{4}+1}}\Rightarrow\frac{y}{2}=\frac{(x^{4}+1)+1}{\sqrt{x^{4}+1}}\Rightarrow\frac{y}{2}=\frac{(x^{4}+1)}{\sqrt{x^{4}+1}}+\frac{1}{\sqrt{x^{4}+1}}$$

$$\frac{y}{2}=\sqrt{x^{4}+1}+\frac{1}{\sqrt{x^{4}+1}}\Rightarrow\sqrt{x^{4}+1}>0:$$

$$\frac{y}{2}\geq 2\rightarrow .....$$

مثال ۲۰) دامنه و برد تابع زیر را بدست آورید.

$$f(x)=\left|۲\sin(x)-۴\cos(x)-۱\right| \to D_f=R$$

$$-\sqrt{a^۲+b^۲}\le a\sin(x)+b\cos(x)\le\sqrt{a^۲+b^۲}$$

$$R_f:-\sqrt{۲^۲+(-۴)^۲}\le ۲\sin x-۴\cos x\le\sqrt{۲^۲+(-۴)^۲}$$

$$\to -۵/...=-\sqrt{۲۰}-۱\le ۲\sin(x)-۴\cos(x)-۱\le\sqrt{۲۰}-۱=۳/...$$

$$۰\le\left|۲\sin(x)-۴\cos(x)-۱\right|\le ۱+\sqrt{۲۰}\to R_f:\left[۰,۱+\sqrt{۲۰}\right]$$

مثال ۲۱) برد تابع $f(x)=۲\tan^۲x+۸\cot^۲x$ را بدست آورید.

$$\forall x,y>۰\to x+y\ge ۲\sqrt{xy} \quad , \quad \forall x,y<۰\to x+y\le -۲\sqrt{xy}$$

$$y=۲\tan^۲x+۸\cot^۲x\Rightarrow ۲\tan^۲x\ge۰,۸\cot^۲x\ge۰$$

$$y=۲\tan^۲x+۸\cot^۲x\ge ۲\sqrt{(۲\tan^۲x)\times(۸\cot^۲x)}$$

$$y\ge ۲\sqrt{۱۶(\tan^۲x\cot^۲x)}=۸ \Rightarrow R_f=[۸,+\infty)$$

همچنین بدانید بعضا نا مساوی ها در حل مسائل ضعف دارن و نمی توان به عنوان یک روش خیلی قابل اعتماد از آن ها استفاده کرد (یک مثال خوب در بخش متفرقه)

خلاصه ای از روش محاسبه دامنه :

دقت به مخرج کسر که صفر نشود + زیر رادیکال فرجه زوج : بیشتر یا مساوی صفر

خلاصه روش محاسبه برد :

تنها سازی x –یک اتفاق پر واضح در قسمت x ها – مشکل در قسمت y (مثل صفر شدن مخرج) – اعمال شرط x (همان دامنه)

یک سری دقت مثل :

دقت در توان زوج رساندن + دقت در حضور رادیکال فرجه زوج + شبیه سازی و خلاقیت!

چند بازی بازه ی مهم!

$$(-۳,۴)^۲=[۰,۱۶)$$

$$\left|(-۳,۴)\right|=[۰,۴)$$

$$\frac{۱}{(۳,۴)}=\left(\frac{۱}{۴},\frac{۱}{۳}\right)$$

$$\frac{۱}{(۰,۴)}=\left(\frac{۱}{۴},+\infty\right)$$

$$\frac{۱}{(-۳,۴)}=\left(-\infty,-\frac{۱}{۳}\right)\cup\left(\frac{۱}{۴},+\infty\right)$$

۵-۲-۵ درجه ۲ و دامنه محدود

در مورد تابع درجه ۲ ، $y=f(x)=ax^{۲}+bx+c$ اگر ضریب a مثبت باشد منحنی min دارد و برد آن بصورت $R_f=[\min,+\infty)$ و اگر ضریب a منفی باشد max دارد و برد آن بصورت $R_f=(-\infty,\max]$ می‌باشد که مقدار این حداقل و حداکثر برابر با $\frac{-\Delta}{۴a}=\frac{۴ac-b^{۲}}{۴a}$ می‌باشد.

مثال ۲۲) برد تابع $f(x)=x^{۲}-۴x+۵$ را بدست آورید.

$$f(x)=x^{۲}-۴x+۵\rightarrow a>۰,\frac{-\Delta}{۴a}=f(\frac{-b}{۲a})=f(۲)=۱\rightarrow R_f=[۱,+\infty)$$

$$y=x^{۲}-۴x+۵=x^{۲}-۴x+۴-۴+۵=(x-۲)^{۲}+۱\rightarrow$$

$$(x-۲)^{۲}\geq ۰\rightarrow (x-۲)^{۲}+۱\geq ۱\rightarrow y\geq ۱\rightarrow R_f=[۱,+\infty)$$

حال اگر دامنه محدود بود چه کنیم: بازهم مربع کامل

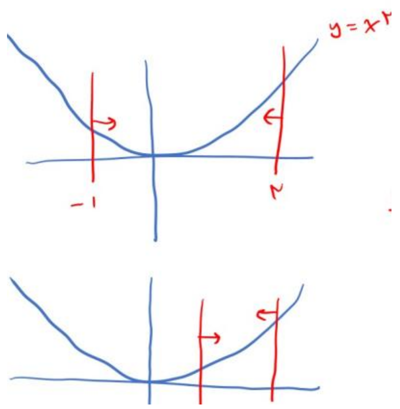
مثال ۲۳) برد تابع $f(x)=x^{۲}-۴x+۵$ را با دامنه $[۰,۳]$ بدست آورید.

$$y=x^{۲}-۴x+۵=x^{۲}-۴x+۴-۴+۵=(x-۲)^{۲}+۱$$

$$D_f=[۰,۳]\rightarrow ۰\leq x\leq ۳\rightarrow -۲\leq x-۲\leq ۱\rightarrow$$

$$۰\leq (x-۲)^{۲}\leq ۴\rightarrow ۱\leq (x-۲)^{۲}+۱\leq ۵\rightarrow R_f=[۱,۵]$$

اما اگر دامنه تابع محدود بود چه کنیم؟



$R_f=(O,O)$

اگر بازه داده شده ، شامل راس باشد:

کاندیدا ← f (رأسی) و f (آخر) و f (اول)

اگر بازه داده شده ، شامل راس نباشد:

کاندیدا ← f (آخر) و f (اول)

حل مثال :

شبیه سازی مثلثاتی !! (بین ۱- و ۱+)

تذکر ۱۰) برد در توابع محدود شده چه قیدی دارد؟ کافیست آن قسمتی از برد که مربوط به دامنه حذف شده است را از برد کل تابع خارج نمائید. اصلا تابع محدود شده یعنی چی؟ یعنی تابع یک دامنه‌ای داشته ولی ما قسمت خاصی از دامنه تابع برایمان مهم می‌باشد! (مثال دیدیم!)

٦-٢-٥ چند مثال و روش جالب (شبیه سازی + دلتا)

مثال ٢٤) برد توابع زیر را بدست آورید

$$a) = f(x) = x + ۲\sqrt{x-۱} + ۵$$

$$f(x) = \left(\sqrt{x-۱}+۱\right)^۲ + ۵ \to \sqrt{x-۱} \geq ۰ \to \sqrt{x-۱}+۱ \geq ۱ \to \left(\sqrt{x-۱}+۱\right)^۲ \geq ۱ \to$$

$$\left(\sqrt{x-۱}+۱\right)^۲ + ۵ \geq ۶ \to f(x) \geq ۶ \to R_f = [۶,+\infty)$$

$$b) y = -۳\sin^۲(x) + ۴$$

$$۰ \leq \sin^۲ x \leq ۱ \to -۳ \leq -۳\sin^۲ x \leq ۰ \to ۴-۳ \leq ۴-۳\sin^۲ x \leq ۴$$

دو مورد دیگر در متفرقه

مثال ٢٥) دامنه و برد تابع زیر را بدست آورید

$$y = \frac{x^۲-۱}{x^۲+۱}$$

<u>**روش دلتا**</u>

اگر یک رابطه بر حسب توان دوم x داریم و می‌خواهیم برد آن را بدست آوریم کافیست دلتای معادله درجه ۲ برحسب x را بزرگتر مساوی ۰ قرار دهیم.

چرا؟

$$x^۲y + ۳x + y^۲ = ۰$$

فقط در این روش اکثرا از طرفین وسطین استفاده میکنید و بهتر است که نقاط مرزی را کنترل کنید!

$$y = \frac{x^۲-۱}{x^۲+۱} \to D_f = \mathbb{R}, R_f \to yx^۲ + y = x^۲ - ۱ \to yx^۲ + y - x^۲ + ۱ = ۰ \to$$

$$(y-۱)x^۲ + (y+۱) = ۰ \to \Delta = ۰^۲ - ۴(y-۱)(y+۱) \geq ۰ \to$$

$$-۴(y^۲-۱) \geq ۰ \to y^۲ - ۱ \leq ۰ \to -۱ \leq y \leq ۱ \to .... \to -۱ \leq y < ۱$$

۲ مثال دیگر در متفرقه

مثال ٢٦) دامنه و برد تابع زیر را بدست آورید

$$y = \begin{cases} y_۱ = -x^۲ + ۴ & ; x \geq ۱ \\ y_۲ = ۲x + ۵ & ; x < ۱ \end{cases}$$

<u>**محاسبه دامنه و برد توابع چند ضابطه ای**</u>

برای محاسبه برد توابع چند ضابطه‌ای باید برد هر ضابطه را با توجه به دامنه احتمالا محدودشده‌ی آن محاسبه نمود و سپس از تمامی بردها اجتماع گرفت. همچنین می‌دانیم دامنه یک تابع چند ضابطه‌ای از اجتماع تک تک دامنه ضابطه‌ها بدست می‌آید!

$$D_f = x \geq ۱ \cup x < ۱ = \mathbb{R} \quad , R_f = R_۱ \cup R_۲$$

$$R_۱ \Rightarrow x \geq ۱ \to x^۲ \geq ۱ \to -x^۲ \leq -۱ \to ۴ - x^۲ \leq ۳ \to y_۱ \leq ۳ \Rightarrow R_۱ = (-\infty, ۳]$$

مثال ۲۷) دامنه و برد تابع مقابل را بدست آورید. $y=x+\sqrt{۴-x^{۲}}$

تذکر ۱۱) بدانید و آگاه باشید که هر جا به یک طرف همواره مثبت رسیدید به سادگی از کنار آن عبور ننمائید! و دقت در توان ۲ رساندن خصوصا در حضور رادیکال. سوال بسیار مهم زیر خاکی کنکور دهه ۸۰

$)y=x+\sqrt{۴-x^{۲}}\quad D_f=۴-x^{۲}\geq ۰\rightarrow x^{۲}\leq ۴\rightarrow -۲\leq x\leq ۲$

$R_f\Rightarrow y=x+\sqrt{۴-x^{۲}}\rightarrow y-x=\sqrt{۴-x^{۲}}\quad (\wedge ۲)$

$\rightarrow\sqrt{۴-x^{۲}}\geq ۰\rightarrow y-x\geq ۰\rightarrow y\geq x\xrightarrow{D_f}y\geq x\geq -۲\rightarrow y\geq -۲(*)$

$(\wedge ۲):(y-x)^{۲}=۴-x^{۲}\Rightarrow x^{۲}+y^{۲}-۲xy=۴-x^{۲}\Rightarrow ۲x^{۲}-۲xy+y^{۲}-۴=۰$

$a=۲,b=-۲y,c=y^{۲}-۴\Rightarrow\Delta\geq ۰\Rightarrow\Delta=۴y^{۲}-۸y^{۲}+۳۲\geq ۰\rightarrow y^{۲}\leq ۸$

$\rightarrow -۲\sqrt{۲}\leq y\leq ۲\sqrt{۲}\xrightarrow{\cap(*)}-۲\leq y\leq ۲\sqrt{۲}\quad R_f=\left[-۲,۲\sqrt{۲}\right]$

مثال ۲۸) دامنه توابع زیر را بدست آورید و مقایسه کنید

$f(x)=\sqrt{(x-۱)(x-۳)}\quad,\quad g(x)=\sqrt{x-۱}\sqrt{x-۳}$

تذکر ۱۲) بطور کلی دامنه توابع زیر باهم برابر نیستند. $\left(\sqrt{\frac{p}{q}}\ ,\ \frac{\sqrt{p}}{\sqrt{q}}\right)\quad\left(\sqrt{pq}\ ,\ \sqrt{p}\sqrt{q}\right)$

مثال ۲۹) (تمرین) دامنه و برد تابع مقابل را بدست آورید $y=f(x)=\frac{۲}{\sqrt{۸\sin(x)-۴}}$

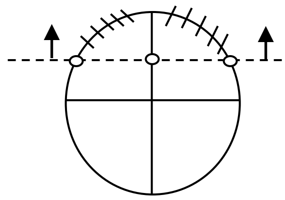
$y=f(x)=\frac{۲}{\sqrt{۸\sin(x)-۴}}\quad D_f\Rightarrow ۸\sin x-۴>۰\rightarrow ۸\sin x>۴\rightarrow\sin x>\frac{۱}{۲}$

$R_f\Rightarrow\frac{۱}{۲}<\sin x\leq ۱\xrightarrow{\times ۸}۴<۸\sin x\leq ۸$

$\xrightarrow{-۴}۰<۸\sin x-۴\leq ۴\xrightarrow{\sqrt{}}۰<\sqrt{۸\sin-۴}\leq ۲$

$\rightarrow\frac{۱}{\sqrt{۸\sin x-۴}}\geq\frac{۱}{۲}\xrightarrow{\times ۲}\frac{۱}{\sqrt{۸\sin x-۴}}\geq ۱$

$\rightarrow ۱\leq y<+\infty:R_f=[۱,+\infty)$



چند کلمه حرف حساب در خصوص مثلثاتی ها و متفرقه ....

سینوس و کسینوس دامنه R دارند و برد محدود(   ) ولی تانژانت و کتانژانت برعکس برد Rدارند

ولی در دامنه به مشکل مخرج بر میخورند.

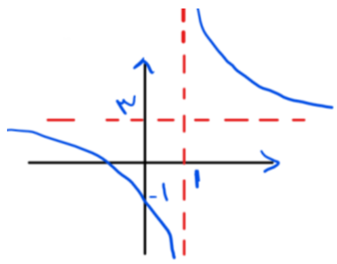
۵-۲-۷ تابع هموگرافیک

مثــال ۳۰) تابع مقابل را رسم کنید و دامنه و برد آن را از روی شکل و ضابطه محاسبه کنید

$y=f(x)=\frac{۳x+۱}{x-۱}\to D_f=\mathbb{R}-\{۱\}$

$yx-y=۳x+۱\Rightarrow yx-۳x=y+۱\Rightarrow x(y-۳)=y+۱$

$\Rightarrow x=\frac{y+۱}{y-۳}\quad\Rightarrow y\neq ۳\,,\quad\Rightarrow R_f=\mathbb{R}-\{۳\}$



برای رسم تابع $y=\frac{ax+b}{cx+d}$ باید مراحل زیر طی شود:

خط چین راهنمای افقی : مجانب افقی : $y=\frac{a}{c}$

خط چین راهنمای عمودی : مجانب قائم : $x=\frac{-d}{c}$

علامت $(ad-bc)$: ۲ تیپ افزایشی(+) و تیپ کاهشی (-)

۵-۲-۸ بررسی دو مسئله مهم دامنه

باید دانست که دامنه یک تابع مثل f(x) به معنای آن‌چه می‌باشد که می‌تواند جلوی f بشیند و همچنین حدود x را مشخص می‌نماید.

مسئله اول: دامنه f(x) را بدهند و دامنه f(u(x)) را بخواهند:

روش حل: u را در بازه دامنه f قرار دهید و برای x نامعادله حاصل را حل کنید. مجموعه جواب بدست آمده جواب مسئله می‌باشد!

مسئله دوم: دامنه f(u(x)) را بدهند دامنه تابع f(x) را بخواهند:

روش حل: دامنه داده شده حد و حدود x را معین می‌کند نه u . پس از روی حدود x ، حدود u را بیابید و حدود بدست آمده، جواب مسئله می‌باشد!

مثــال ۳۱) اگر دامنه تابع f ، $D_f=[-۱,۱]$ باشد. مطلوب است محاسبه دامنه تابع g بصورت $g(x)=۲f(۲x-۳)$

$-۱\leq ۲x-۳\leq ۱\to ۱\leq x\leq ۲:D_g$

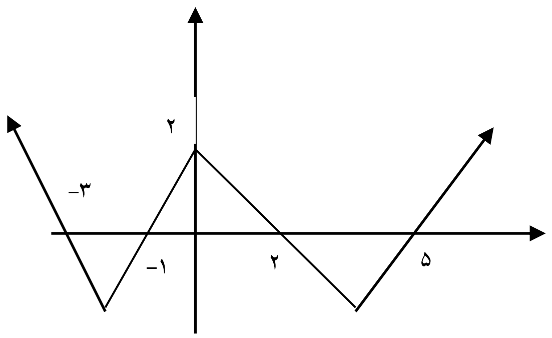
مثــال ۳۲) اگر دامنه تابع g(x) با تعریف $g(x)=f(x-۲)$ ، برابر $[۰,\infty)$ باشد . مطلوب است محاسبه دامنه تابع f(x)

$x\geq ۰\to x-۲\geq -۲\to D_f=[-۲,+\infty)$

مثــال ۳۳) (تمرین) دامنه تابع $f(۳x)$ بازه $[-۱,۲]$ دامنه تابع $f(۲x+۱)$ را بدست آورید.

۹-۲-۵ یک مساله بسیار مهم دامنه

مثــال ۳٤) در شکل مقابل نمودار تابع $f(x)$ داده شده است.دامنه تابع $\sqrt{xf(2x)}$ را بیابید



تذکــر ۱۳) اگر بجای x عبارت پیچیده‌تری بود باید به رسم جدول تعیین علامت می‌پرداختید.

مثــال ۳۵) مثال بزنید، تابعی که:

دامنه ۳ عضوی و برد ٦ عضوی

دامنه ٦ عضوی و برد ۳ عضوی

۶ بازی ضابطه

۶-۱ نوع اول

شخص f(x) را می دهند و f(z) را می خواهند (z عبارتی بر حسب x) کافیست :
بجای x در ضابطه f، z را قرار دهیم.

مثال ۳۶) اگر $g(x)=\frac{1-3x}{x+2}, f(x)=\frac{2x+3}{2-x}$ باشند، مطلوب است محاسبه $g(f(x))$؟

$$g(f(x))=g\left(\frac{2x+3}{2-x}\right)=\frac{1-3\left(\frac{2x+3}{2-x}\right)}{2+\left(\frac{2x+3}{2-x}\right)}=\frac{\frac{2-x-3(2x+3)}{2-x}}{\frac{2(2-x)+(2x+3)}{2-x}}=\frac{-7x-7}{7}=-x-1$$

مثال ۳۷) اگر $f(x)=\begin{cases}\frac{x}{\sqrt{1-x}} & ; x<1\\ 2x-\frac{3}{4} & ; x\geq 1\end{cases}$ باشد، مقدار $f(f(\frac{3}{4}))$ چقدر است؟

مثال ۳۸) اگر $f(x)=x^2+2x+2, f(g(x))=x^2-4x+5$ باشد ضابطه $g(x)$ را بدست آورید .

$$f(g(x))=g^2+2g+2=x^2-4x+5$$
$$(g+1)^2+1=(x-2)^2+1 \Longrightarrow (g+1)^2=(x-2)^2 \to$$

۶-۲ نوع دوم

شخص f(x) را می خواهند و f(z) را می دهند(z تابعی از x) کافیست :
باید $z=t$ قرار داده و x را بر حسب t بدست آوریم و در ضابطه جایگذاری کنیم تا $f(t)$ بر حسب t بدست آید.....

مثال ۳۹) اگر $f\left(\frac{3x-1}{2}\right)=\sqrt{x}$ باشد، ضابطه f(x) را بدست آورید

$$\frac{3x-1}{2}=t \to 3x-1=2t$$
$$\to 3x=2t+1 \to x=\frac{2t+1}{3} \to f(t)=\sqrt{\frac{2t+1}{3}} \to f(x)=\sqrt{\frac{2x+1}{3}}$$

تذکر ۱۴) در بعضی از سوالات این نوع باید از شبیه سازی استفاده کرد!

$$f(x+\frac{1}{x})=x^2+\frac{1}{x^2} \Rightarrow f(x)=?$$

مثـال ٤٠) در سوالات زیر ضابطه f(x) را بدست آورید.

$$۲) f\left(x-\frac{۱}{x}\right)=x^{۲}+\frac{۱}{x^{۲}}$$

$$۳) f\left(x+\frac{۱}{x}\right)=x^{۳}+\frac{۱}{x^{۳}}$$

$$\left(x+\frac{۱}{x}\right)^{۳}=x^{۳}+\frac{۱}{x^{۳}}+۳x\frac{۱}{x}\left(x+\frac{۱}{x}\right)\Rightarrow x^{۳}+\frac{۱}{x^{۳}}=\left(x+\frac{۱}{x}\right)^{۳}-۳x\frac{۱}{x}\left(x+\frac{۱}{x}\right)$$

$$f\left(x+\frac{۱}{x}\right)=\left(x+\frac{۱}{x}\right)^{۳}-۳\left(x+\frac{۱}{x}\right)\Rightarrow f(x)=$$

$$۴) f\left(x-\frac{۱}{x}\right)=x+\frac{۱}{x}\quad (x>\circ)$$

$$x-\frac{۱}{x}=t\Rightarrow t^{۲}=x^{۲}+\frac{۱}{x^{۲}}-۲\Rightarrow t^{۲}+۴=x^{۲}+\frac{۱}{x^{۲}}+۲=\left(x+\frac{۱}{x}\right)^{۲}$$

$$x+\frac{۱}{x}=\pm\sqrt{t^{۲}+۴}\Rightarrow f(t)=\sqrt{t^{۲}+۴}$$

٦-٣ نوع سوم

شخص f(q) را می خواهند و f(z) را می دهند(q,z تابعی از x) کافیست :

اگر q یک عدد باشد : از حل معادله $z=q$ مقدار x را بدست آورده و با جایگذاری در ضابطه، f(q) را بدست آورید.

اگر q یک عبارت جبری باشد باید از واسطه ای بنام f(x) استفاده کنیم.

مثـال ٤١) اگر $f\left(\frac{۲x-۱}{x}\right)=x^{۲}+۱$ باشد مقدار $f(-۱)$ را بدست آورید ؟

$$\frac{۲x-۱}{x}=-۱\to ۲x-۱=-x\to ۳x=۱\to x=\frac{۱}{۳}\to f(-۱)=\frac{۱}{۹}+۱$$

اگر ضابطه $f(۱+\sin^{۲}x)$ را بخواهیم بدست آوریم ، ابتدا باید ضابطه $f(x)$ را بدست آوریم (نوع دوم) و سپس بجای x عبارت $(۱+\sin^{۲}x)$ را قرار دهیم (نوع اول).

به عنوان تمرین انجام دهید$\left(\frac{۱}{\cos^{۴}x}+۱\right)$

٦-٤ نوع چهارم

۱۱ مساله مهم زیر را در یابید!

مثـال ٤٢) اگر رابطه $xf(-x)+f(۲)=\frac{۱}{x^{۲}+۱}$ بر قرار باشد. مقدار $f(-۳)$ را بدست آورید

مثـال ۴۳) مطلوبست محاسبه ضابطه تابع f(x) اگر بدانیم: $۲f(x)+۳f(-x)=۲x-۱$

$x\to -x: ۲f(-x)+۳f(x)=-۲x-۱$

$$\to\begin{cases}۲f(x)+۳f(-x)=۲x-۱\\ ۲f(-x)+۳f(x)=-۲x-۱\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-۴f(x)-۶f(-x)=-۴x+۲\\ ۶f(-x)+۹f(x)=-۶x-۳\end{cases}$$

$$\to +\quad ۵f(x)=-۱۰x-۱\to f(x)=$$

مثـال ۴۴) مطلوبست محاسبه ضابطه تابع f(x) اگر بدانیم $f(x)+۲f(\frac{۱}{x})=x+۱$

تمرین

مثـال ۴۵) مطلوبست محاسبه f(x) اگر بدانیم $(x<۰)$; $f(\frac{x}{y})=\frac{\sqrt{x^۲+y^۲}}{x}$

مثـال ۴۶) اگر $f(x)=\sqrt{۱-x^۲}$ حاصل عبارت $f(f(f(...f(۰)...)))$ را بدست آورید.

$f(۰)=\sqrt{۱-۰}=۱\Rightarrow f(f(۰))=f(۱)=۰$

$\Rightarrow f(f(f(۰)))=f(۰)=۱\Rightarrow f(f(f(f(۰))))=f(۱)=۰\Rightarrow .....$

مثـال ۴۷) مساله مهم ۷: اگر داشته باشیم $f(x)=\frac{x^۳+۳x^۲+۳x}{x^۳+۳x^۲+۳x-۱۷}$ مطلوب است محاسبه $f(\sqrt[۳]{۳}-۱)$

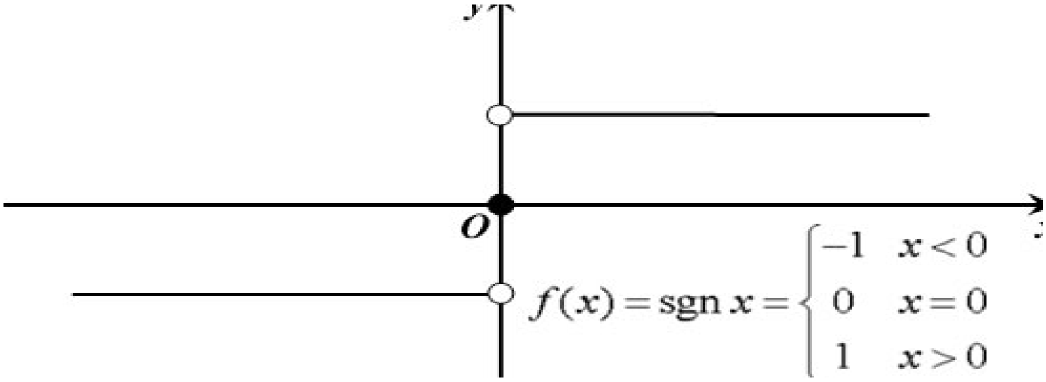
$$f(x)=\frac{x^۳+۳x^۲+۳x+۱-۱}{x^۳+۳x^۲+۳x+۱-۱-۱۷}=\frac{(x+۱)^۳-۱}{(x+۱)^۳-۱۸}\Rightarrow f(\sqrt[۳]{۳}-۱)=$$

مثـال ۴۸) اگر در تابع خطی f داشته باشیم: $۳f(۲x+۱)+f(۴x-۱)=۵x-۲$
مقدار f(۳) چقدر است؟

چند مساله مهم در متفرقه

۷ معرفی چند تابع خاص

۷-۱ تابع علامت یا ساین(sgn)



$$f(x)=\operatorname{sgn} x=\begin{cases}-1 & x<0\\ 0 & x=0\\ 1 & x>0\end{cases}$$

آیا می‌توانید یک ضابطه برای آن پیدا کنید؟

۷-۲ تابع همانی

اگر تابعی هر مقداری را که به عنوان ورودی می‌گیرد را به عنوان خروجی تحویل دهد، آن تابع همانی می‌باشد. یعنی :

تذکر ۱۵) مطابق تعریف بالا دامنه و برد تابع همانی ....

مثال ۴۹) کدام یک از توابع زیر همانی هستند.

$$f(x)=\left(\sqrt{x}\right)^2 \quad , \quad g(x)=|x|\operatorname{sgn}(x)$$

$f(x)=x$

$x>0 = x(1)=x$

$x<0=(-x)(-1)=x$

مثال ۵۰) برای تابع زیر محل برخورد دو تابع تعریف شده کدام است؟

$$g(x)=|x|\operatorname{sgn}(x) \quad , \quad y_1=g(3x-1) \quad , \quad y_2=g(2-2x)$$

۷-۳ تابع ثابت

اگر به ازای تمامی ورودی‌های یک تابع تنها یک خروجی داشته باشیم آن تابع ثابت می‌باشد.

یعنی:

تذکر ۱۶) مطابق این تعریف نمودار تابع ثابت موازی محور x هاست یعنی .... و برد آن .....عضویست.

مثـال ۵۱) چند تا از توابع زیر ثابت هستند؟

$$f(x)=\tan(x)\cot(x)\ ,\ g(x)=\operatorname{sgn}(-x^{2}+2x-3)\ ,\ h(x)=\sqrt{x-|x|}$$

۱) ۰ ‏ ۲) ۱ ‏ ۳) ۳ ‏ ۴) ۲

مثـال ۵۲) بازای چه مقادیری از a,b تابع با ضابطه $f(x)=\dfrac{x^{2}+ax+b}{bx^{2}+2x+4}$ به تابع ثابت تبدیل می گردد.

$$f(x)=\frac{x^{2}+ax+b}{bx^{2}+2x+4}=\lambda\rightarrow x^{2}+ax+b=\lambda bx^{2}+2\lambda x+4\lambda\rightarrow$$

$$\begin{cases}1=\lambda b\rightarrow \dfrac{1}{b}=\lambda\\ a=2\lambda\rightarrow\dfrac{a}{2}=\lambda\rightarrow\dfrac{1}{b}=\dfrac{b}{4}=\dfrac{a}{2}\rightarrow b^{2}=4\rightarrow b=\pm2\rightarrow a=\dfrac{2}{b}=\pm1\\ b=4\lambda\rightarrow\dfrac{b}{4}=\lambda\end{cases}$$

مثـال ۵۳) تابع زیر را رسم نمائید.

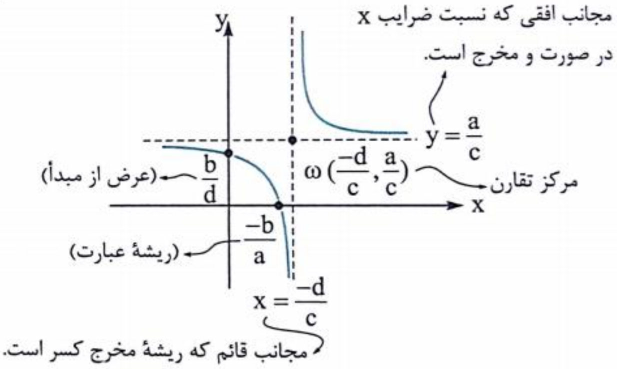
$$f_{1}=\operatorname{sgn}(x-2)+\operatorname{sgn}(x)$$

$$\square\ 0\ \square\ 2\ \square\rightarrow$$

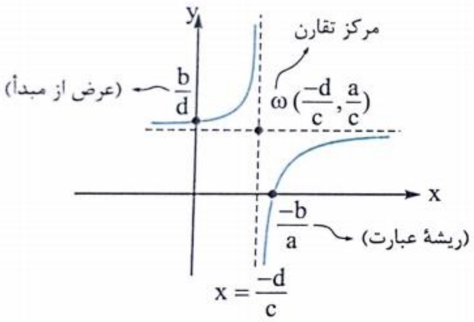
$$\begin{cases}x=0 & :f=-1+0=-1\\ x<0 & :f=-1+(-1)=-2\\ 0<x<2 & :f=-1+1=0\\ x=2 & :f=0+1=1\\ x>2 & :f=1+1=+2\end{cases}$$

۸ شکل های توابع معروف

فرض $ad - bc < 0$:



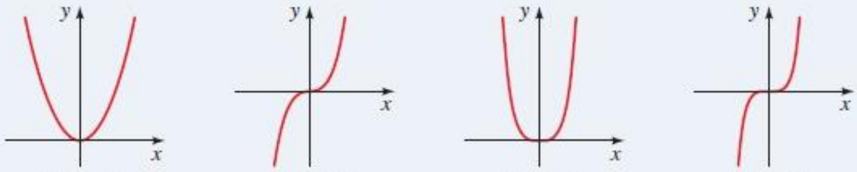
با فرض $ad - bc > 0$:



توابع خطی
$f(x) = mx + b$

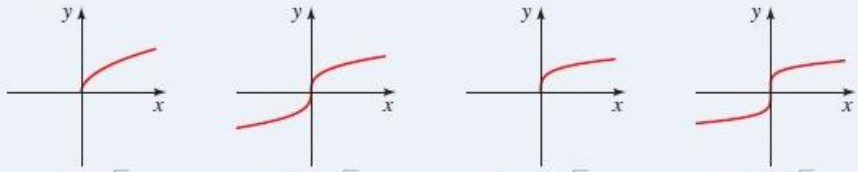
$f(x) = b$ — $f(x) = mx + b$

توابع توان دار
$f(x) = x^n$



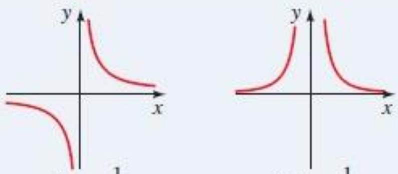
$f(x) = x^2$ — $f(x) = x^3$ — $f(x) = x^4$ — $f(x) = x^5$

توابع رادیکالی
$f(x) = \sqrt[n]{x}$



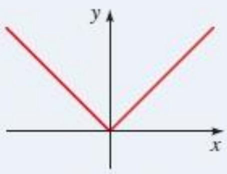
$f(x) = \sqrt{x}$ — $f(x) = \sqrt[3]{x}$ — $f(x) = \sqrt[4]{x}$ — $f(x) = \sqrt[5]{x}$

توابع کسری
$f(x) = \frac{1}{x^n}$



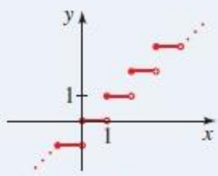
$f(x) = \frac{1}{x}$ — $f(x) = \frac{1}{x^2}$

تابع قدر مطلق
$f(x) = |x|$



$f(x) = |x|$

تابع جزء صحیح
$f(x) = [\![x]\!]$



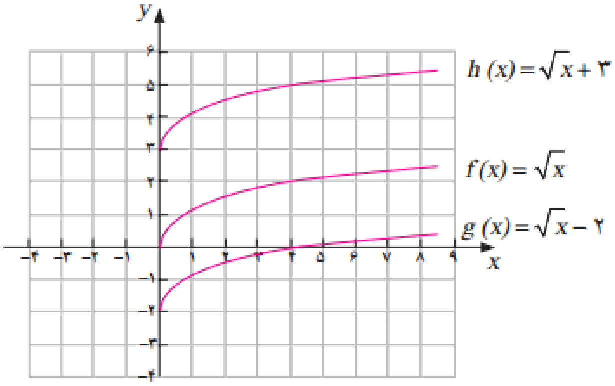
$f(x) = [\![x]\!]$

۹ رسم توابع

۹-۱ انتقال و مقیاس

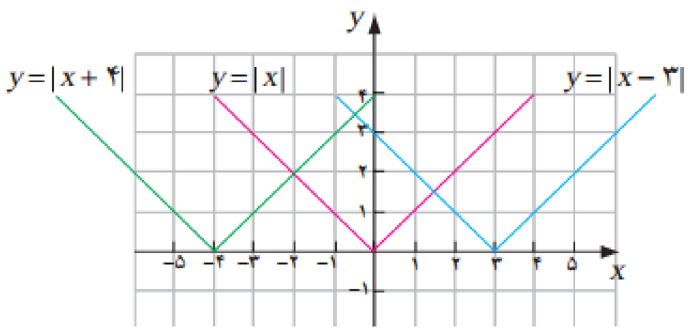
۹-۱-۱ انتقال عمودی رسم f(x)+a

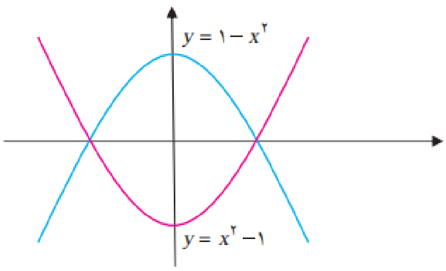
اگر a مثبت باشد به اندازه a واحد به سمت بالا و اگر منفی باشد به همان اندازه به سمت پائین نمودار را انتقال می‌دهیم. البته بدون تغییر در طول نمودار.



۹-۱-۲ انتقال افقی رسم f(x+a)

اگر a، مثبت باشد، نمودار در راستای محور طول‌ها به اندازه a واحد به سمت چپ منتقل می‌گردد بدون تغییر در عرض نمودار و اگر منفی باشد، نمودار در راستای محور طول‌ها به اندازه a واحد به سمت راست منتقل می‌گردد بدون تغییر در عرض نمودار.



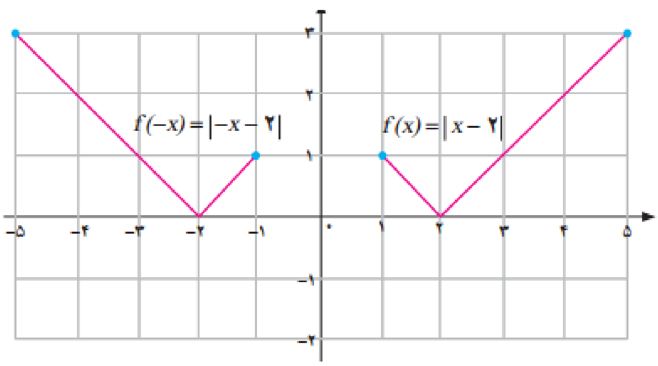


۹-۱-۳ رسم قرینه تابع f(x)−

کافیست نمودار را نسبت به محور طول قرینه کنیم.

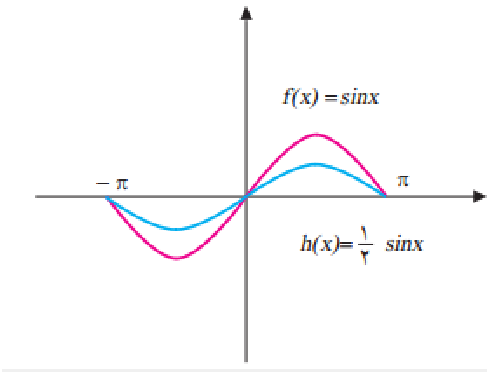
۹-۱-٤ رسم f(-x)

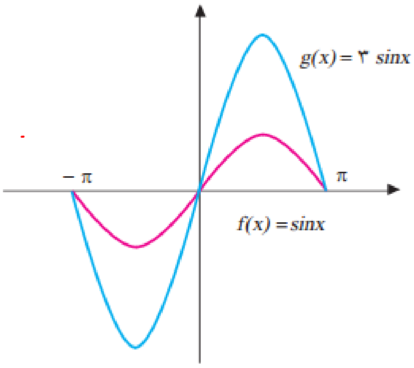
کافیست نمودار را نسبت به محور عرض قرینه کنیم.



۹-۱-۵ انبساط و انقباض عرضی رسم $af(x)$ و $a>0$

کافیست عرض نمودار را در a ضرب کنیم و اگر $a>1$ باشد انبساط در راستای محور عرض رخ می‌دهد و اگر $a<1$ انقباض رخ می‌دهد!

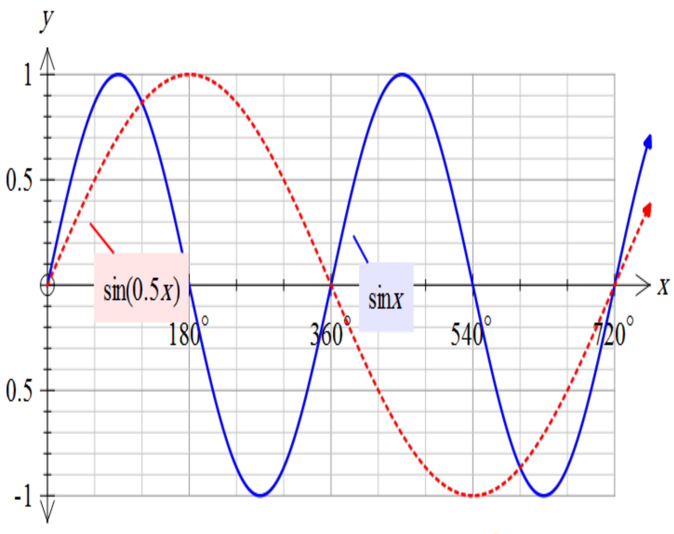


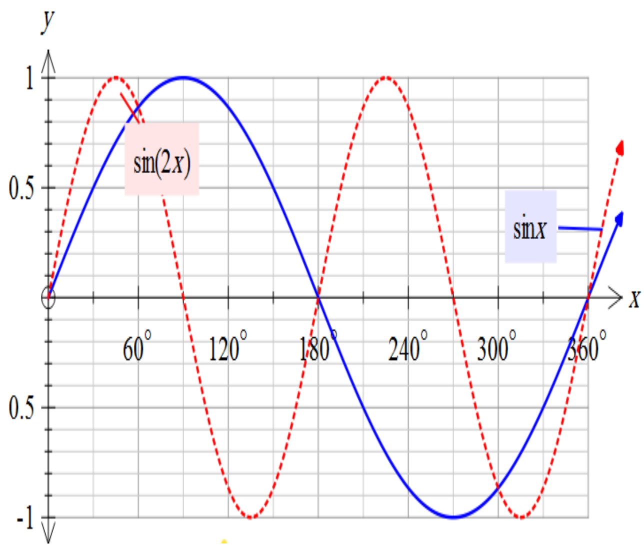


اگر a منفی بود چطور ؟

۹-۱-٦ انبساط و انقباض طولی رسم $f(ax)$ و $a>0$

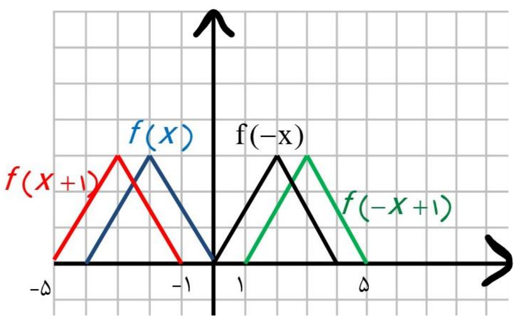
اگر $a>1$ باشد نمودار بدون تغییر در عرض در راستای محور افقی منقبض می‌گرددو ضریب این انقباض $\frac{۱}{a}$ می‌باشد. و اگر $a<1$ باشدمشابه قبلی اما منبسط می‌گردد!!!!





اگر a منفی بود چطور ؟

مثال ٥٤) نمودار تابع $f(-x)$ داده شده است نمودار تابع $f(-x+۱)$ را رسم نمائید.(روش دامنه و روش برگرداندن خود تابع $f(x)$)



$$Df_{(-x)}=[۰,۴] \Rightarrow Df_{(x)}=[-۴,۰]$$
$$Df_{(-x+۱)} \Rightarrow -۴ \le -x+۱ \le ۰ \Rightarrow$$
$$-۵ \le -x \le -۱ \Rightarrow ۱ \le x \le ۵$$

دقت دارید برعکس شده !!!!

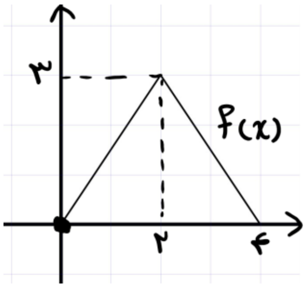
۹-۲ انتقال مقیاس ترکیبی

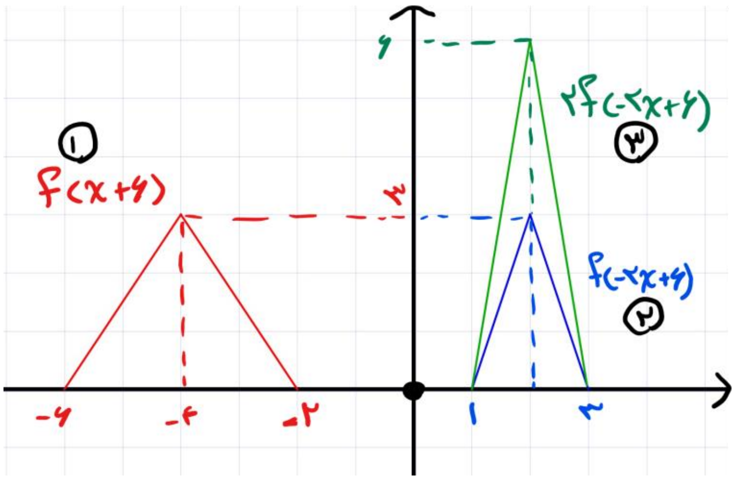
رسم $af(cx+d)+g$ از روی $f(x)$

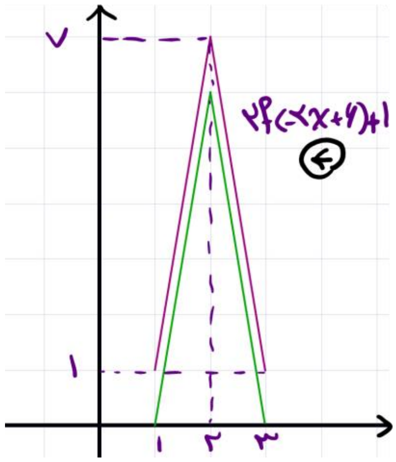
کد طلایی ۳۲۱۴

انتقال طول( ) و بعد مقیاس طول ( ) و بعد (حالا برعکس) مقیاس عرض( ) و بعد انتقال عرض ( )

مثال ۵۵) نمودار تابع $f(x)$ داده شده است نمودار تابع $2f(-2x+6)+1$ را رسم نمایید. (روش دامنه و روش بیان شده)







$$D_f=[0,4]$$
$$D_{f(-2x+6)}\Rightarrow 0\le -2x+6\le 4\Rightarrow -6\le -2x\le -2\Rightarrow 1\le x\le 3$$
$$R_f\Rightarrow y=f_{(x)}\to 0\le y\le 3\Rightarrow 0\le 2y\le 6\Rightarrow 1\le 2y+1\le 7$$

۹-۳ رسم f(x) از روی f(ax+b)

همان مسیر اصلی را برگردید !!!!

مثال ۵۶) فرض کنید شکل مساله قبلی نمودار تابع $g(x)=f(3x+2)$ باشد. نمودار تابع $f(x)$ را رسم نمایید. (+ روش دامنه)

$$0\le x\le 4 \Rightarrow 0\le 3x\le 12 \Rightarrow 2\le 3x+2\le 14\Rightarrow D_{f(x)}=[2,14]$$

می توانید از روش تغییر متغیر هم استفاده کنید ......

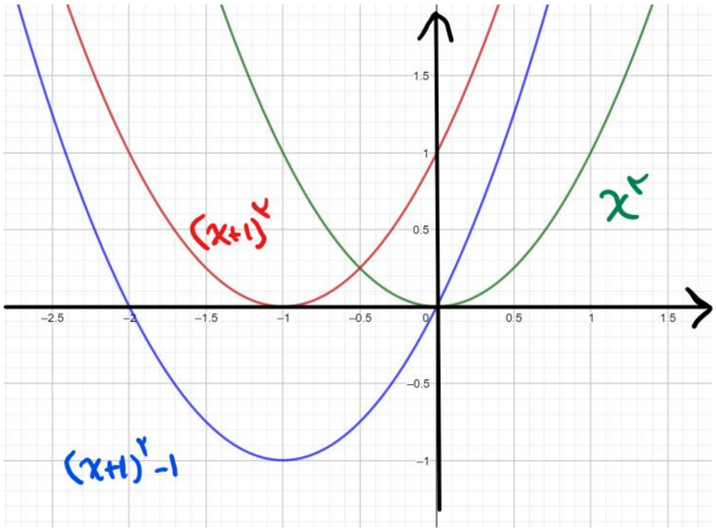
$$ax+b=t \Rightarrow \frac{t-b}{a}=x \Rightarrow \frac{1}{a}t-\frac{b}{a}$$

تذکــر ۱۷) مانند ماجرای مثال قبلی می تواند برای برد هم رخ دهد که بازهم مدل حل مساله همان برگشتن مسیر اصلی است!

تذکــر ۱۸) اتفاقات داخل و بیرون پرانتز جدای از هم هستند!

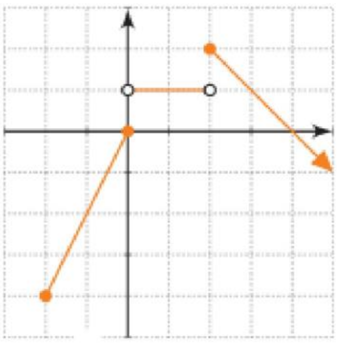
تذکــر ۱۹) اگر $2f(3x+1)-5$ را دارند و $-f(-x+5)$ را خواستند چه کار کنیم؟ استفاده از واسطه‌ای بنام $f(x)$

مثــال ۵۷) تابع مقابل را رسم نمایید $f(x)=(x+1)^2-1$



مثــال ۵۸) اگر نمودار تابع $y=x^2+1$ را یک واحد به سمت بالا و دو واحد به سمت راست انتقال دهیم . معادله نمودار جدید به کدام صورت خواهد بود؟

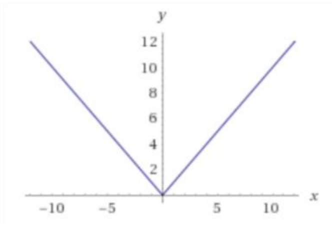
مثــال ۵۹) نمودار تابع قطعه ای f در شکل مشخص شده است. ضابطه تابع و همچنین دامنه و برد آن را بدست آورید



مثــال ۶۰) نمودار تابع $f(x)=\begin{cases} x^2 & ; x>0 \\ 3x+1 & ; x\le 0 \end{cases}$ را رسم کنید .

۱۰ تابع قدر مطلق و رسم های قدرمطلقی

۱-۱۰ تعاریف



قدر مطلق هر عددی بصورت اندازه آن عدد با علامت مثبت می‌باشد: $f(x)=|x|=\begin{cases} x & ;x\ge 0 \\ -x & ;x<0\end{cases}$

دامنه و برد این تابع: $D_f=\mathbb{R}\ ,\ R_f=\mathbb{R}^+$

۲-۱۰ ویژگی‌های قدر مطلق

دوره شود از فصل ۴

مثـال ٦١) اگر بدانیم $|\sin(x)+\cos(x)|<|\sin(x)|+|\cos(x)|$ کمان x در کدام ناحیه مثلثاتی قرار دارد؟

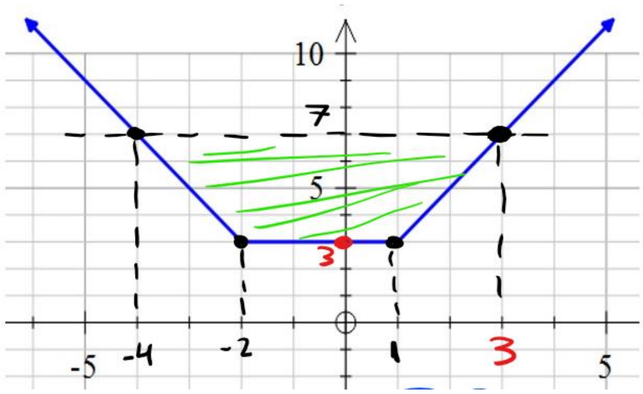
$$|a+b|<|a|+|b|\Rightarrow ab<0\Rightarrow \sin x\times\cos x<0$$

۳-۱۰ اصل ماجرای قدرمطلق

تابع $f(x)=|x-۱|+|x+۲|$ را به کمک تابع چندضابطه‌ای گسترش دهید و رسم نمائید و معادله $|x-۱|+|x+۲|=۷$ را حل کنید و مساحت ذوزنقه حاصل را محاسبه کنید

$$x-۱=۰\to x=۱\ ,\ x+۲=۰\to x=-۲$$

x		−۲		۱	
x−۱	−		−	0	+
x+۲	−	0	+		+



$$f(x)=|x-۱|+|x+۲|$$

$$(I)\ \ x\le-۲\quad :f(x)=-(x-۱)-(x+۲)=-۲x-۱$$
$$(II)\ -۲<x<۱\ :f(x)=-(x-۱)+(x+۲)=۳$$
$$(III)\ \ x\ge۱\quad :f(x)=(x-۱)+(x+۲)=۲x+۱$$

$$|x-۱|+|x+۲|=۷$$
$$-۲x-۱=۷\to x=-۴\cap(I)\Rightarrow x=-۴$$
$$۳=۷\to\phi$$
$$۲x+۱=۷\to x=۳\cap(III)\Rightarrow x=۳$$

$$S=\frac{(۳-(-۴))+(۱-(-۲))}{۲}\times(۷-۳)=۲۰$$

۱۰-٤ دامنه و برد توابع قدر مطلقی

استفاده از نامساوی ها و این مفهوم که قدر مطلق x همواره نا منفی است ! و ایده همیشگی قدر مطلق؟؟!!!

مثـال ۶۲) دامنه و برد توابع زیر را محاسبه نمایید.

$$f(x)=\frac{x+۲}{|x|-۲}$$

$$D_f \Rightarrow |x|-۲=۰ \to x=\pm۲ \to D_f=\mathbb{R}-\{\pm۲\}$$

$$|x| \to (۱) x \ge ۰ \to y=\frac{x+۲}{x-۲} \to yx-۲y=x+۲ \to yx-x=۲y+۲ \to x(y-۱)=۲y+۲$$

$$x=\frac{۲y+۲}{y-۱}>۰ \Rightarrow y>۱ \ or \ y \le -۱ \quad (I)$$

$$(۲) x<۰ \to y=\frac{x+۲}{-x-۲}=-۱ \ (II) \qquad \Rightarrow (I)\cup(II) \ (-\infty,-۱]\cup(۱,+\infty)$$

$$g(x)=\frac{۱}{\sqrt{|x+۱|-۴}}$$

$$D=|x+۱|-۴>۰ \Rightarrow |x+۱|>۴ \Rightarrow (x+۱>۴) or (x+۱<-۴) \Rightarrow (x>۳) or (x<-۵)$$

$$h(x)=\sqrt{-|x+۱|}$$

برد تابع gدر متفرقه

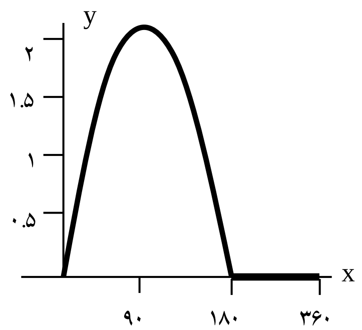
۱۰-۵ رسم نمودارهای قدرمطلقی

۱-۵-۱۰ روش‌های مختلف رسم نمودار قدرمطلقی

روش کلی

راه کلی تعیین علامت و تقسیم قدرمطلق به زیر بازه هایی که درباره علامت خبر داریم:

$$y=|\sin(x)|+\sin(x)$$



یک مدل خاص

مثـال ٦٣) تابع $y=|x-۴|+x+|۳+x|+|-x+۶|$ را رسم کنید

$y=|x-۴|+x+|x+۳|+|x-۶|$

$x\le -۳ \Rightarrow y=-(x-۴)+x-(x+۳)-(x-۶)=-۲x+۷ \quad (I)$

$-۳<x\le ۴ \Rightarrow y=-(x-۴)+x+(x+۳)-(x-۶)=۱۳ \quad (II)$

$۴<x<۶ \Rightarrow y=(x-۴)+x+(x+۳)-(x-۶)=۲x+۵ \quad (III)$

$x\ge ۶ \Rightarrow y=۴x-۷ \quad (IV)$

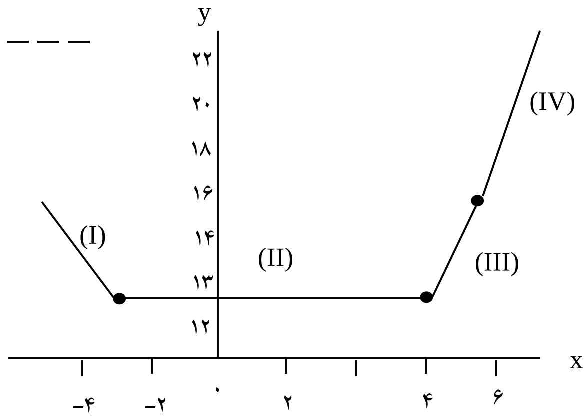
$x=۴ \rightarrow y=۱۳$

$x=۶ \rightarrow y=۱۷$

$x=-۳ \rightarrow y=۱۳$

$x_{min}=-۵ \rightarrow y=۱۷$

$x_{max}=۷ \rightarrow y=۲۱$

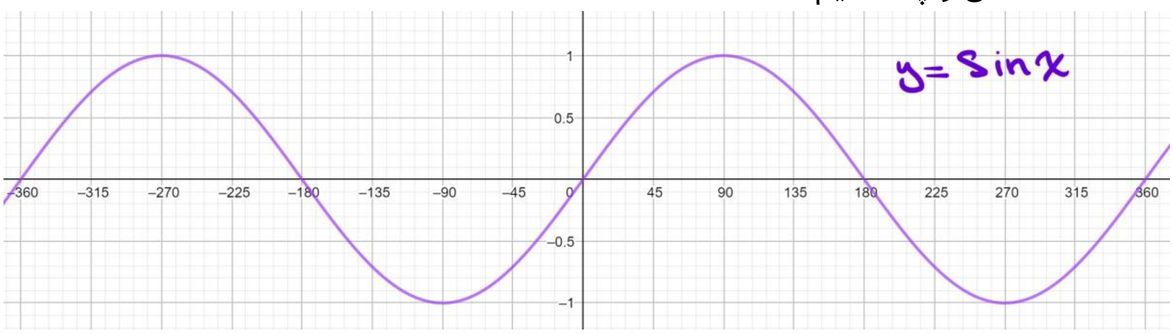


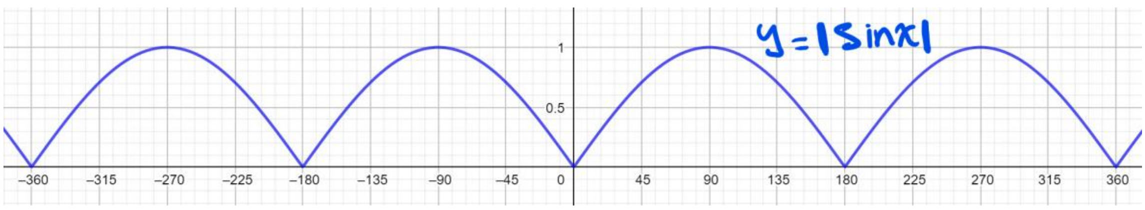
روش رسم توابع به این فرم : جمع یک مشت تابع خطی که شاید در قدر مطلق هم باشند !

جالب است این توابع اگر حداقل یا حداکثر عرض داشته باشند، در یکی از ریشه های قدر مطلق رخ می دهد

رسم $|f(x)|$

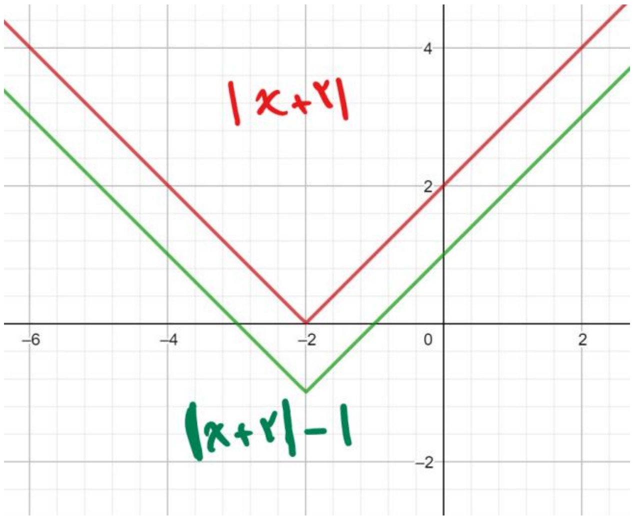
برای رسم $y=|f(x)|$ کافیست هرجا تابع منفیست را نسبت به محور طول قرینه کنیم و قسمت منفی را پاک کنیم



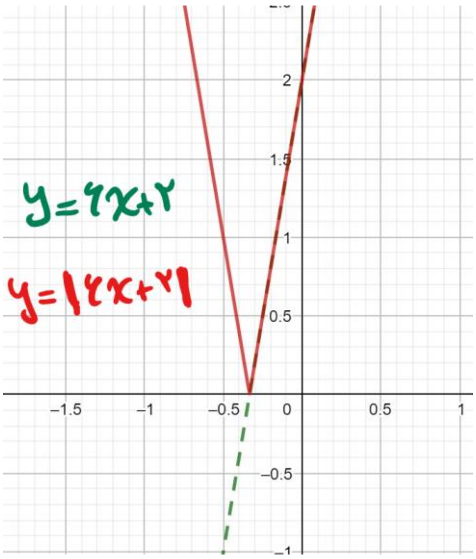


مثال ٦٤) نمودار های زیر را رسم کنید

$g(x)=|x+2|-1$



$f(x)=2|3x+1|=|6x+2|$

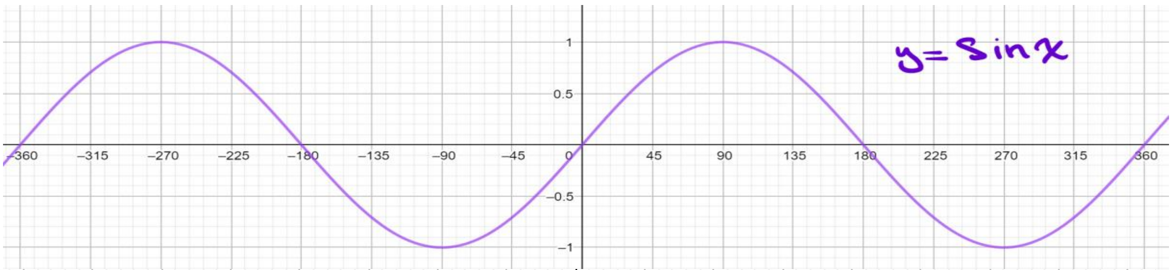


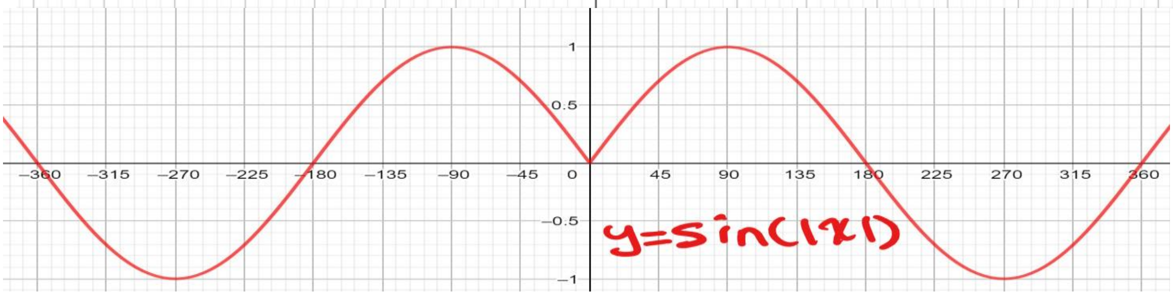
دقت به راس شکل های قدر مطلقی (ریشه درون قدرمطلق)

به عنوان تمرین نمودار $||x|-2|$ را رسم کنید

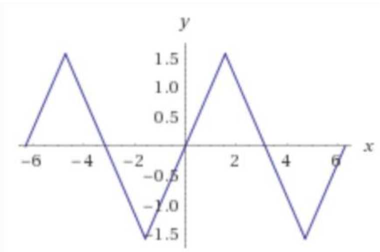
رسم نمودار $f(|x|)$

برای رسم $y=f(|x|)$ کافیست هرجا x منفیست را پاک کرده و شکل باقی مانده را نسبت به محور y قرینه کنیم (؟)

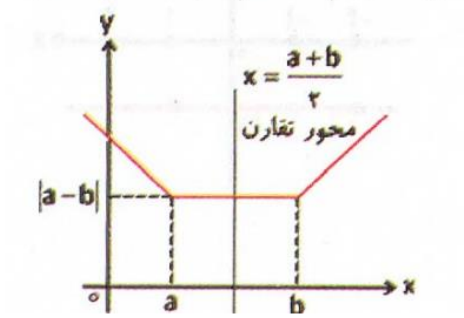




مثال ٦٥) اگر تابع f(x) بصورت شکل زیر باشد مطلوبست شکل $f(-|x|)$



۶-۱۰ رسم نمودار گلدانی



۱-۶-۱۰ نکات

۱- کمترین مقدار تابع اختلاف ریشه های قدر مطلق است: $|a-b|$

۲- دو نقطه زاویه دار(گوشه)در دو ریشه قدر مطلق وجود داردکه عرض آن‌ها برابر $|a-b|$ است.

۳- شیب خطوط ۲ و ۲- می‌باشد.

٤- یک محور تقارن با عدد میانگین ریشه ها وجود دارد: $x=\frac{a+b}{۲}$

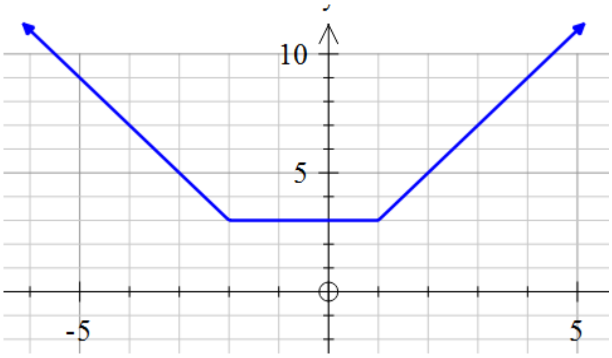
۵- $|x-a|+|x-b|\geq|a-b| : R_f=\left[|a-b|,\infty\right)$

٦- حل معادله: $|x-a|+|x-b|=k>۰$

$k>|a-b| : \frac{a+b\pm k}{۲}$

$k=|a-b| : \infty$

$k<|a-b| : non$

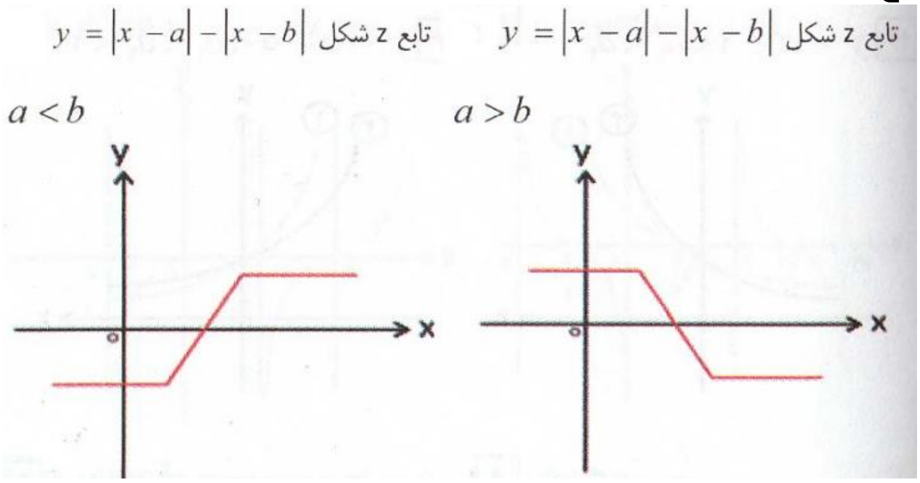


اگر معادله ۲ جواب داشته باشد ، جمع این دو جواب برابر است با جمع ۲ ریشه قدرمطلق

کنترل مثال معروف **اصل ماجرای قدرمطلق**

معادله $|۲x+۲|+|-۲x+۴|=۶$ چطور حل می شود ؟

۱۰-۷ تابع صندلی یا آبشاری



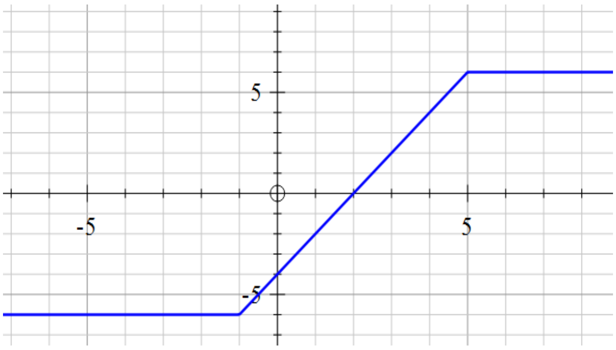
۱۰-۷-۱ نکات

۱- $-|a-b|\le y\le |a-b| : R_f=\left[-|a-b|,|a-b|\right]$

۲- طول از مبدا شکل میانگین ریشه یا $\frac{a+b}{۲}$ هست که اتفاقاً مرکز تقارن نمودار است.؟

۳- عرض از مبدا شکل $|a|-|b|$ می باشد.

٤- حل معادله $|x-a|-|x-b|=k$



$-|a-b|<k<|a-b| : x=\frac{a+b\pm k}{۲}$

$k=|a-b| \vee -|a-b| : \infty$

$k\notin R_f : non$

+ برای صعودی ‌‌ ‌ ‌ - برای نزولی ‌ ‌ : در مورد جواب معادله ‌ ‌ دقت فرمایید در هر صورت یک جواب دارد.

مثـال ٦٦) نمودار $|x-۱|-|x+۳|=-۴$ را رسم نمائید و نکات را تحقیق نمائید و معادله را حل نمائید؟

۱۱ مسائل و موارد متفرقه (اختیاری)

۱۱-۱ تابع بودن

مثـال ٦٧) بررسی کنید رابطه $\frac{y}{\sqrt{1-y^2}}=x$ تابع هست یا خیر ؟

$$\frac{y}{\sqrt{1-y^2}}=x \qquad \frac{y_1}{\sqrt{1-y_1^2}}=x_1,\frac{y_2}{\sqrt{1-y_2^2}}=x_2 \qquad x_1=x_2$$

$$\rightarrow \frac{y_1}{\sqrt{1-y_1^2}}=\frac{y_2}{\sqrt{1-y_2^2}} \quad \left(y_1y_2>0 \quad *\right)\xrightarrow{\wedge 2}\frac{y_1^2}{1-y_1^2}=\frac{y_2^2}{1-y_2^2}\longrightarrow$$

$$y_1^2-y_1^2y_2^2=y_2^2-y_1^2y_2^2\rightarrow y_1^2=y_2^2\rightarrow y_1=\pm y_2\rightarrow * \quad y_1=y_2$$

تابع هست.

دو نکته کمی خارج از گود !

- ضابطه به فرم $y^3+P(x)y+q(x)=0$ هنگامی معرف یک تابع است که عبارت $\Delta=4p^3+27q^2$ بزرگتر از صفر باشد.
- هرگاه ضابطه ای بصورت $f(x)=g(y)$ مرتب شده باشد و عبارت $g(y)$ (متغیر وابسته) یک رابطه اکیدا یکنوا باشد، رابطه مورد نظر تابع می باشد.

مثـال ٦٨) کدام رابطه تابع نیست؟

$1)\ y^2+4x^2=4xy \rightarrow y^2+4x^2-4xy=0\rightarrow (y-2x)^2=0\rightarrow y=2x$ خط تابع

$2)\ x^2+4y^2+2=2x+4y\rightarrow x^2-2x+1+4y^2-4y+1=0\rightarrow (x-1)^2+(2y-1)^2=0$

$3)\ x^2+5y^2+2xy=4y\rightarrow x=0\rightarrow 5y^2=4y\rightarrow (y=0)\left(5y=4\right)\Rightarrow$ ۲y تا

$4)\ y^2+x=2\sqrt{x}-1 \quad : y^2+\left(\sqrt{x}-1\right)^2=0\Rightarrow \left|\begin{array}{l} x=1 \\ y=0 \end{array}\right.$

مثـال ٦٩) روابط زیر روی R تعریف شده اند. نشان دهید این روابط تابع نیستند.

$x^2+4y^2-4y=0$

$x=0\Rightarrow 4y(y-1)=0$

$\sqrt{x}+\sqrt{y}=1$

$x_1=x_2\Rightarrow \sqrt{x_1}=\sqrt{x_2}\Rightarrow \sqrt{x_1}-1=\sqrt{x_1}-1\rightarrow \sqrt{y_1}=\sqrt{y_2}\rightarrow y_1=y_2\rightarrow$ ؟!

مثـال ۷۰) آیا دستگاه بخت آزمایی در شهر بازی یک تابع محسوب می شود ؟

مثال ۷۱) ثابت کنید رابطه $x\,R\,y \Leftrightarrow x^۳+y^۳+۷x+y-۵=۰$ روی R یک تابع می باشد.

$$x_۱=x_۲ \Rightarrow x_۱^۳=x_۲^۳ \Rightarrow x_۱^۳+۷x_۱=x_۲^۳+۷x_۲ \Rightarrow x_۱^۳+۷x_۱-۵=x_۲^۳+۷x-۵$$
$$\Rightarrow y_۱^۳+y_۱=y_۲^۳+y_۲ \Rightarrow$$

مثال ۷۲) رابطه زیر بر روی $R-\{۴\}$ تعریف شده است. در چه صورت معرف یک تابع نیست؟

$$x\,R\,y \Leftrightarrow x=\frac{۴y-a}{y-۱}$$
$$(x_۱,y_۱)\in R \text{ ، } (x_۲,y_۲)\in R \quad x_۱=x_۲=x$$
$$\Rightarrow \frac{۴y_۱-a}{y_۱-۱}=\frac{۴y_۲-a}{y_۲-۱} \Rightarrow ۴y_۱y_۲-۴y_۱-ay_۲+a=۴y_۲y_۱-۴y_۲-ay_۱+a$$
$$\to ۴(y_۲-y_۱)-a(y_۲-y_۱)=۰ \to (y_۲-y_۱)(۴-a)=۰ \quad \Rightarrow a=۴$$

مثال ۷۳) آیا رابطه f بصورت مقابل معرف تابع هست؟

$$f:[۰,۵]\to[۳,۱۸]$$
$$f(x)=x^۲-۲x+۳=(x-۱)^۲+۲$$

تابع نیست $۰\le x\le ۵ \to -۱\le x-۱\le ۴ \to ۰\le (x-۱)^۲\le ۱۶ \to ۲\le f_x\le ۱۸ \not\subset B$

مثال ۷۴) کدام گزینه y تابعی از x می باشد؟

۱) $y^۳-y^۲+x=۰ \to x=۰ \to y^۳-y^۲=۰ \to y^۲(y-۱)=۰ \to y$ ۲ تا

۲) $y+y^۳=x^۳+۱ \Rightarrow y^۳+y-(x^۳+۱)=۰ \quad P=۱ \quad q=...... \to ۴p^۳+۲۷q^۲>۰$

۳) $|y-۱|+x=۰ \to x=-۲ \to |y-۱|=۲ \to y-۱=\pm۲ \to y$ ۲ تا

۴) $xy^۲-x=۱ \to x=۱ \to y^۲=۲ \to y$ ۲ تا

اثبات تشریحی (۲)

$$x_۱=x_۲ : x_۱^۳=x_۲^۳ : x_۱^۳+۱=x_۲^۳+۱ : y_۱+y_۱^۳=y_۲+y_۲^۳ : y_۱-y_۲=y_۲^۳-y_۱^۳$$
$$: y_۱-y_۲=(y_۲-y_۱)(y_۲^۲+y_۱y_۲+y_۱^۲) \to (y_۱-y_۲)+(y_۱-y_۲)(y_۱^۲+y_۱y_۲+y_۲^۲)=۰$$
$$: (y_۱-y_۲)(y_۲^۲+y_۲y_۱+y_۱^۲+۱)=۰ : y_۱=y_۲$$
$$\Delta=y_۱^۲-۴(y_۱^۲+۱)=-۳y_۱^۲-۴<۰$$

مثـال ۷۵) تابع بودن موارد زیر را بررسی کنید

$$۱)\frac{x}{y}+\frac{y}{x}=-۲\to\frac{x^{۲}+y^{۲}}{xy}=-۲\Rightarrow x^{۲}+y^{۲}=-۲xy$$

$$\to(x+y)^{۲}=\circ\to y=-x\ \ (x,y\neq\circ)$$

$$۲)x^{۲}-۳xy=\frac{x}{۲}\quad\to x-۳y=\frac{۱}{۲}\ \ ؟؟!!$$

$$\to x=\circ\to\circ=\circ\to y\in\mathbb{R}\to ??!!$$

$$۳)x+\sqrt{y+۲}=y\qquad ۱)x=\circ\to\sqrt{y+۲}=y>\circ\xrightarrow{\wedge ۲}$$

$$y+۲=y^{۲}\to y^{۲}-y-۲=\circ\to y=-۱,۲\to y=۲\ ؟\ !!$$

$$۲)x=-۲\to .....$$

۱۱-۲ دامنه و برد

مثــال ۷۶) دامنه و برد تابع $f(x)=\frac{۷x^{۶}}{x^{۱۲}+۱}$ را بدست آورید

$$y=f(x)=\frac{۷x^{۶}}{x^{۱۲}+۱}\Rightarrow D_f=\mathbb{R}$$
$$\frac{۱}{y}=\frac{x^{۱۲}+۱}{۷x^{۶}}\Rightarrow\frac{۷}{y}=x^{۶}+\frac{۱}{x^{۶}}$$
$$\rightarrow x^{۶}>۰\Rightarrow\frac{۷}{y}\geq ۲\rightarrow y\leq\frac{۷}{۲}\rightarrow\xrightarrow{!}۰\leq y\leq ۳/۵$$

دقت به این همه توان زوج داشته باشید !

یک سوال مهم : آیا می توان در محاسبه برد به راحتی طرفین نامساوی ها را جمع کرد ؟؟؟!!!

مثــال ۷۷) برد تابع $y=f(x)=\sin(x)+\cos(x)$ را بدست آورید

در سال یازدهم میخوانیم که $۲\sin x\cos x=\sin ۲x$

$$y^{۲}=\left(\sin(x)+\cos(x)\right)^{۲}=\sin^{۲}x+\cos^{۲}x+۲\sin x\cos x$$
$$y^{۲}=۱+\sin ۲x\rightarrow ۰\leq y^{۲}\leq ۲\rightarrow-\sqrt{۲}\leq y\leq\sqrt{۲}$$

چند مورد مثلثاتی دیگر

توابع ساده مثلثاتی با ضابطه نظیر $f(x)=\sin(x)$ یا $f(x)=\cos(x)$ دارای دامنه R می‌باشند و اما برای دو تابع معروف دیگر داریم:

$$f(x)=\tan(x)=\frac{\sin(x)}{\cos(x)}\Rightarrow\cos(x)=۰\Rightarrow x=k\pi+\frac{\pi}{۲}$$
$$D_f=\Re-\left\{x\,\middle|\,x=k\pi+\frac{\pi}{۲},k\in Z\right\}$$
$$f(x)=\cot(x)=\frac{\cos(x)}{\sin(x)}\Rightarrow\sin(x)=۰\Rightarrow x=k\pi$$
$$D_f=\Re-\{x\,|\,x=k\pi,k\in Z\}$$

و اما برد توابع سینوس و کسینوس که $[-۱,۱]$ می‌باشد و برد توابع تانژانت و کتانژانت نیز R می‌باشد.

مثــال ۷۸) برد تابع $f(x)=\sin^{۸}x+\cos^{۸}x$ را بدست آورید.

بد نیست بدانیم که $(\frac{۱}{۲})^{n-۱}\leq\sin^{۲n}(x)+\cos^{۲n}(x)\leq ۱$

$$f(x)=\sin^{۸}x+\cos^{۸}x\rightarrow ۲n=۸\rightarrow n=۴\rightarrow$$
$$(\frac{۱}{۲})^{۴-۱}\leq\sin^{۸}x+\cos^{۸}x\leq ۱\rightarrow\frac{۱}{۸}\leq f(x)\leq ۱\rightarrow R_f=\left[\frac{۱}{۸},۱\right]$$

مثال ۷۹) دامنه و برد توابع زیر را بدست آورید

$$a)\ y=2\cos^2(x)-\cos(x)=2\left(\cos^2 x-\frac{1}{2}\cos x\right)=2\left(\cos^2 x-\frac{1}{2}\cos x+\frac{1}{16}-\frac{1}{16}\right)=$$

$$2\left((\cos x-\frac{1}{4})^2-\frac{1}{16}\right)\to -1\le\cos x\le 1\to\frac{-5}{4}\le\cos x-\frac{1}{4}\le\frac{3}{4}\to$$

$$0\le(\cos x-\frac{1}{4})^2\le\frac{25}{16}\to\frac{-1}{16}\le(\cos x-\frac{1}{4})^2-\frac{1}{16}\le\frac{24}{16}\to\frac{-1}{8}\le y\le 3$$

$$b)\ y=(x^2+2x+5)^2+8$$

$$y=\left((x+1)^2+4\right)^2+8\to(x+1)^2\ge 0\to(x+1)^2+4\ge 4\to\left((x+1)^2+4\right)^2\ge 16\to\left((x+1)^2+4\right)^2+8\ge 24$$

$$c)\ y=\frac{x^2+2x}{x^2+2x+1}\quad,\ D_f=R-\{-1\}\ ,\ R_f=(-\infty,1)$$

$$d)\ y=\frac{-2}{x^2+x+1}\quad,\ D_f=R\quad ,R_f\to$$

$$yx^2+yx+y=-2\to yx^2+yx+(y+2)=0\to\Delta\ge 0$$

$$y^2-4y(y+2)\ge 0\to -3y^2-8y\ge 0\to -3y(y+\frac{8}{3})\ge 0\to\frac{-8}{3}\le y\le 0\to\ ......\to R_f=\left[\frac{-8}{3},0\right)$$

مثال ۸۰) اگر $f(x)=\dfrac{5x+1}{x-2}$ دامنه تابع y=f(f(x)) را تعیین کنید.

$$f(f(x))=f(\frac{5x+1}{x-2})=\frac{5\left(\dfrac{5x+1}{x-2}\right)+1}{\dfrac{5x+1}{x-2}-2}\qquad\qquad x\ne 2\ ,\ \frac{5x+1}{x-2}\ne 2$$

مثال ۸۱) برد تابع $f(x)=\sqrt{\dfrac{x^2-3x}{-x^2+2x+3}}$ را بدست آورید

$$D_f=(-1,0]\quad -1<x\le 0$$

$$R_f\Rightarrow y=\sqrt{\frac{-x}{x+1}}\Rightarrow y\ge 0$$

$$\xrightarrow{\wedge^2}\ y^2=\frac{-x}{x+1}\to y^2x+y^2=-x\to y^2x+x=-y^2$$

$$\to x=\frac{-y^2}{y^2+1}\xrightarrow{D_f}\ -1<\frac{-y^2}{y^2+1}\le 0$$

$$\frac{-y^2}{y^2+1}<0\qquad ,\quad -1<\frac{-y^2}{y^2+1}\xrightarrow{y^2+1>0}-y^2-1<-y^2\qquad\Rightarrow R_f=R\xrightarrow{!}[0,+\infty)$$

۳-۱۱ انواع توابع

مثـال ۸۲) اگر $f(x)=۲\sqrt[۳]{x}+۵$ تابع g(x) را چنان بیابید که دارای $y=g(f(x))$ تابع همانی باشد.

مثـال ۸۳) چرا تابع $\frac{\sqrt{۷x}-\sqrt{۳}}{\sqrt{۳x^{۲}}+۵\sqrt{۳}}$ گویا محسوب نمی شود ؟

مثـال ۸٤) مقادیر a,b را چنان بیابید که مورد ۱ همانی و ۲ ثابت باشد.

$۱.\{(a^{۲}-۱,۳),(a+b,۵),(b+۱,۴)\}$ $\qquad$ $۲.\{(۴,a+b),(۳,۳),(۵,۲a+b)\}$

$b+۱=۴$

$b=۳ \qquad \rightarrow a^{۲}-۱=۳=۳$

$a+b=۵\rightarrow a=۲$

$\begin{cases} a+b=۳ \\ ۲a+b=۳ \end{cases} \rightarrow \begin{matrix} a=۰ \\ b=۳ \end{matrix}$

مثـال ۸۵) اگر برای تابع حقیقی و غیر ثابت f داشته باشیم

$f(x+y)=f(x)+f(y)-۲f(xy)$

آن گاه مقدار f(۱۳۹۸) را بیابید.

$f_{(۲)}=f_{(۱+۱)}=f_{(۱)}+f_{(۱)}-۲f_{(۱)}=۰$

$f_{(۳)}=f_{(۲)}+f_{(۱)}-۲f_{(۲)}=f_{(۱)}$

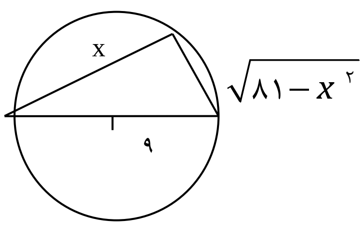
$f_{(۴)}=f_{(۲)}+f_{(۲)}-۲f_{(۴)}\Rightarrow f_{(۴)}=۰$

$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$

$f_{(۱)}=f_{(۳)}=f_{(۵)}=.......$ فردها

$f_{(۲)}=f_{(۴)}=f_{(۶)}=.........=۰$ زوج ها

مثـال ۸٦) در شکل زیر یک مثلث در یک نیم دایره به قطر ۹ محاط شده است کدام گزینه مساحت مثلث را نشان می دهد؟



۱) $x\sqrt{۹-x^{۲}}$ $\qquad$ ۲) $۰/۵x\sqrt{۸۱-x^{۲}}$ $\qquad$ ۳) $x\sqrt{۸۱-x^{۲}}$ $\qquad$ ۴) $۰/۵x\sqrt{۹-x^{۲}}$

۱۱-۴ بازی ضابطه

مثال ۸۷) اگر داشته باشیم $f(x+\frac{1}{x})=x^{4}+\frac{1}{x^{4}}$ ، ضابطه $f(x)$ را بدست آورید

مثال ۸۸) مطلوبست محاسبه f(x) اگر بدانیم: $\sin(x)f(x)+\cos(x)f(-x)=x$

راهنمایی : کافیست x را به منفی x تبدیل کنید و ۲ معادله داشته باشید و دستگاه حل کنید

یاد آوری : $\sin(-x)=-\sin x \quad , \quad \cos(-x)=\cos x$

مثال ۸۹) با توجه به ضابطه های زیر حاصل f(g(x)) را بیابید.

$$f(x)=\begin{cases} x^{2} & ; 0<x<1 \\ 0 & ; x\geq 1 \end{cases} \quad , \quad g(x)=\begin{cases} 2x & ; 0<x<1 \\ 1 & ; x\geq 1 \end{cases}$$

(I) $x\geq 1 \rightarrow g(x)=1 \rightarrow f(g(x))=f(1)=\boxed{0} \rightarrow \underline{x\geq 1}$

(II) $0<x<1 \rightarrow g(x)=2x \rightarrow f(g(x))=f(2x)=?$

$$f(2x)=\begin{cases} (2x)^{2} & 0<2x<1 \,,\, 0<x<1 \\ 0 & 2x\geq 1 \text{ و } 0<x<1 \end{cases} \Rightarrow f(2x)=\begin{cases} \boxed{4x^{2}} & 0<x<\frac{1}{2} \\ \boxed{0} & \underline{\frac{1}{2}\leq x<1} \end{cases}$$

$$f(g(x))=\begin{cases} 4x^{2} & 0<x<\frac{1}{2} \\ 0 & x\geq \frac{1}{2} \end{cases}$$

مثال ۹۰) اگر $f(\frac{1}{x})+3f(1)=\frac{5x+3}{x+1}$ باشد بنظر شما حاصل f(x) کدام است؟

$x=1 \rightarrow 4f(1)=4 \rightarrow f(1)=1$

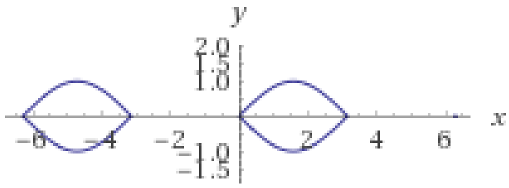
$\rightarrow f(\frac{1}{x})=\frac{5x+3}{x+1}-3\times 1=\frac{2x}{x+1} \Rightarrow$ ....

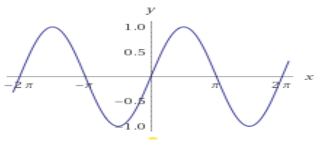
$f_{(x)}=\frac{2}{x+1}$

۵-۱۱ رسم

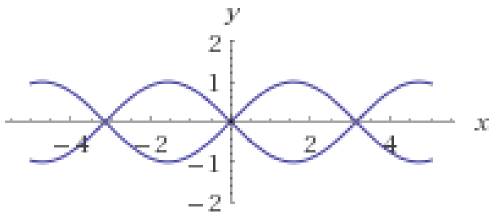
دو رسم قدر مطلقی خاص دیگر

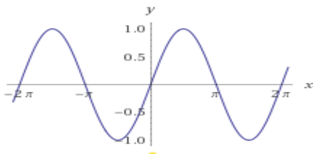
۱- برای رسم $|y| = f(x)$ کافیست هر جا f منفیست را پاک کرده و باقی مانده را نسبت به محور x ها قرینه کنیم.





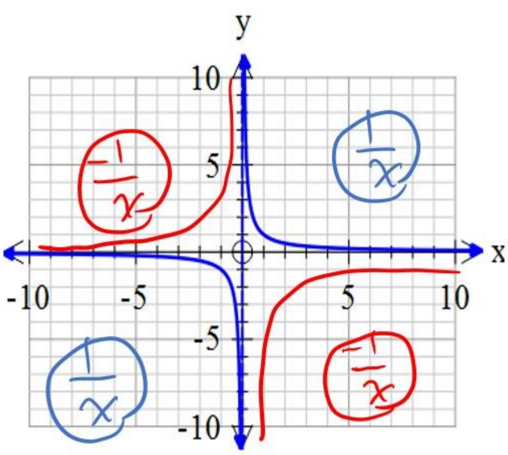
۲- برای رسم $|y| = |f(x)|$ کافیست خود تابع به همراه قرینه آن را نسبت به محور طول‌ها رسم نمائیم!!!

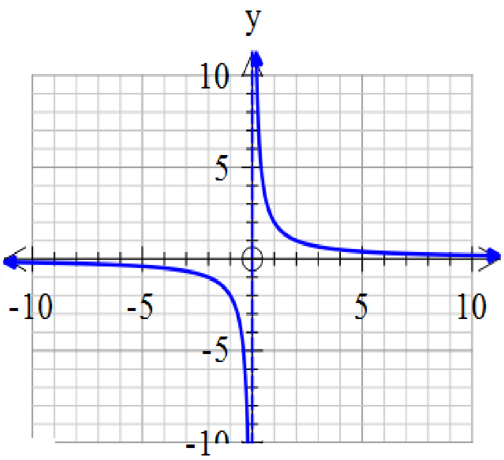


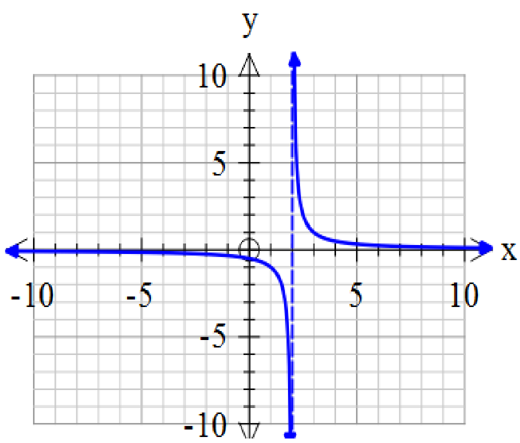


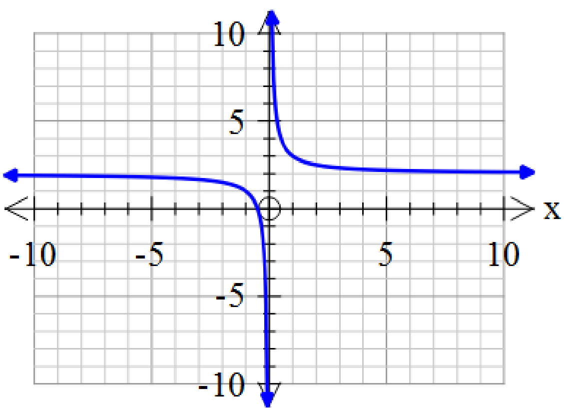
توابع زیر را به کمک تابع $y = \frac{۱}{x}$ رسم کنید؟

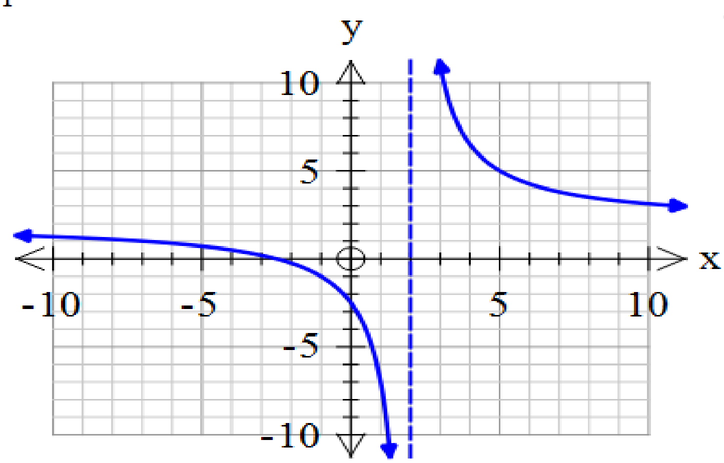
$$y = \frac{۲}{x} \quad , \quad y = -\frac{۱}{x} \quad , \quad y = \frac{۱}{x-۲} \quad , \quad y = \frac{۱}{x} + ۲ \quad , \quad y = \frac{۲x+۵}{x-۲}$$











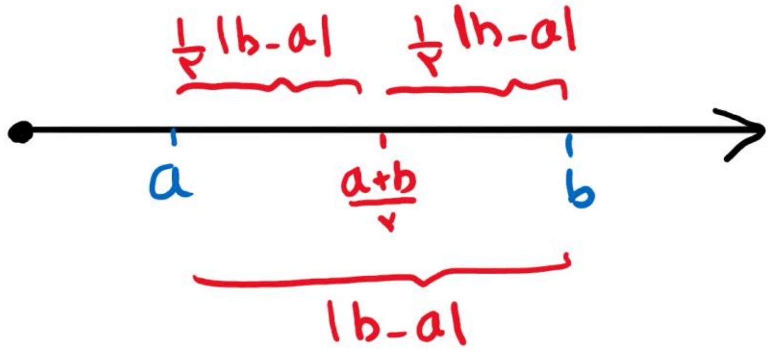
۶-۱۱ قدر مطلق

یک مورد نه چندان واجب! تعریف عملگر ماکسیمم و مینیمم !

$\max(4,6)=6 \qquad a<x<b : |x|<\max(|a|,|b|) \qquad \max\{a,-a\}=|a|$

$\max\{a,b\}=\dfrac{a+b}{2}+\dfrac{|a-b|}{2} \quad , \quad \min\{a,b\}=\dfrac{a+b}{2}-\dfrac{|a-b|}{2}$

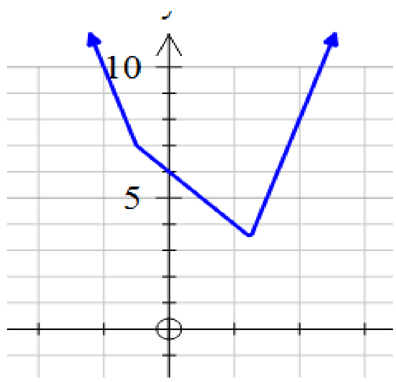
برای فهم بیشتر به شکل زیر توجه کنید



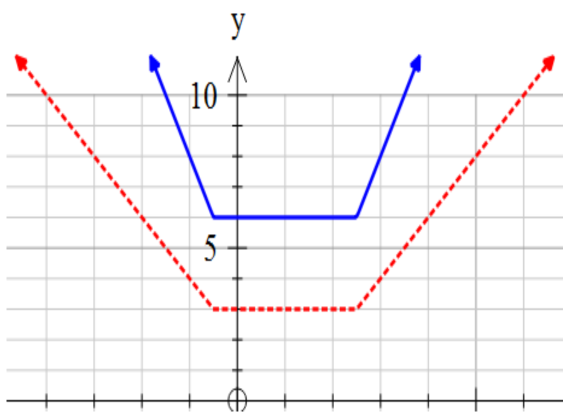
مثال ۹۱) برد تابع $g(x)=\dfrac{۱}{\sqrt{|x+۱|-۴}}$ را بدست آورید $(\circ,+\infty)$

تذکر : تابع به فرمت $y=|a_۱x+b_۱|+|a_۲x+b_۲|$ وقتی محور تقارن دارد که مقدار ضریب x برابر باشد $(|a_۱|=|a_۲|)$ و محور تقارن ، میانگین ریشه های قدر مطلق است و شکل آن گلدانی است که در راستای عرض ها مقیاس شده است.

$y=|۲x+۱|+|-۴x+۵|$



$y=|۲x+۱|+|-۲x+۵|$



۱۱-۷ تشخیص صعودی و نزولی

فرض بر وجود تابعی چون f و نقاط دلخواهی از دامنه چون $x_۱,x_۲$ که $x_۲>x_۱$

۱- f را صعودی اکید نامیم هرگاه $f(x_۲)>f(x_۱)$

۲- f را صعودی نامیم هرگاه $f(x_۲)\geq f(x_۱)$

۳- f را نزولی اکید نامیم هرگاه $f(x_۲)<f(x_۱)$

٤- f را نزولی نامیم هرگاه $f(x_۲)\leq f(x_۱)$

این شروط برگشت‌پذیرند!!!

هر خط با شیب مثبت و همچنین تابع $\sqrt{x}$ رفتار اکیدا صعودی دارند.

هر تابع صعودی اکید یا نزولی اکید را اکیدا یکنوا گویند و هرتابع صعودی یا نزولی را یکنوا و به تابعی که نه صعودی باشد و نه نزولی غیر یکنوا گویند

چند مثال از حل برد با تشخص صعود ی نزولی بودن !

مثـال ۹۲) دامنه و برد توابع زیر را بدست آورید

$a)\ y=\sqrt{x-۵}+\sqrt{x-۲}$

$x\geq ۵ \quad x\geq ۲ \xrightarrow{\cap} x\geq ۵ \rightarrow D_f\ [۵,+\infty)$

$x\uparrow \rightarrow \sqrt{x-۵},\sqrt{x-۲}\uparrow,+\Rightarrow y_a\uparrow$

$R_f=[f_{(۵)},f_{(\infty)})=[\sqrt{۳},+\infty)$

$۱۱b\ )\ y=\sqrt{x-۵}-\sqrt{x-۲}\ D_f=[۵,\infty)\rightarrow x\uparrow \rightarrow y\ ??\rightarrow \times\dfrac{\sqrt{x-۵}+\sqrt{x-۲}}{\sqrt{x-۵}+\sqrt{x-۲}}$

$y=\dfrac{(x-۵)-(x-۲)}{\sqrt{x-۵}+\sqrt{x-۲}}=\dfrac{-۳}{y_a}\rightarrow x\uparrow \rightarrow \dfrac{۱}{y_a}\downarrow \rightarrow \dfrac{-۳}{y_a}\uparrow \rightarrow R_f=[f_{(۵)},f_{(\infty)})=[-\sqrt{۳},۰)$

$۱۱C\ )\ y=\sqrt{x}-\sqrt{۹-x}=\sqrt{x}+(-\sqrt{۹-x})$

$x\geq ۰ \quad x\leq ۹ \xrightarrow{\cap} ۰\leq x\leq ۹$

$x\uparrow \rightarrow \uparrow\sqrt{x}\ ,\ (۹-x)\downarrow \rightarrow -\sqrt{۹-x}\uparrow \rightarrow y_c\uparrow \Rightarrow R_f=[f_{(۰)},f_{(۹)}]=[-۳,۳]$

۱۱-۸ چند تست دامنه و برد

مثال ۹۳) اگر برد تابع g(x) اعداد حقیقی کوچکتر یا مساوی صفر باشد برد تابع $f(x)=\frac{۲g(x)}{g(x)-۲}$ شامل چه تعداد صحیح می شود؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) صفر

$$y=\frac{۲x}{x-۲},x\le ۰\to yx-۲y=۲x\to x=\frac{۲y}{y-۲}\le ۰\to ۰\le y<۲\to ۰,۱$$

مثال ۹٤) برد تابع $f(x)=\frac{۳x^{۲}-۲x}{x-|x|}$ کدام است؟

۱) $(-\infty,۰)$ ۲) $(-\infty,-۱)$ ۳) $(-\infty,-۲/۳)$ ۴) $(۳/۲,\infty)$

$$x-|x|\ne ۰\Rightarrow\to x<۰\quad\Rightarrow y=\frac{۳x^{۲}-۲x}{۲x}=\frac{۳}{۲}x-۱$$

$$x<۰\quad\Rightarrow\frac{۳}{۲}x<۰\quad\Rightarrow\frac{۳}{۲}x-۱<-۱\quad\Rightarrow\quad(-\infty,-۱)$$

مثال ۹۵) دامنه تابع $f(۳x)$ بازه $[-۱,۲]$ دامنه تابع $f(۲x+۱)$ کدام است؟

۱) $[۱/۳,۷/۳]$ ۲) $[-۵,۱۳]$ ۳) $[-۲,۲/۵]$ ۴) $[-۵,۷/۳]$

$$f_{(۳x)}\to f_{(x)}\to f_{(۲x+۱)}$$

$$۱)\ -۱\le x\le ۲\to -۳\le ۳x\le ۶\to D_{f(x)}=[-۳,۶]\to -۳\le ۲x+۱\le ۶\to -۲\le x\le ۲/۵$$

مثال ۹٦) برد تابع $f(x)=\frac{-۷\cos(x)}{\cos(x)+۲}$ شامل چند عدد صحیح است؟

۱) ۹ ۲) ۸ ۳) ۱۰ ۴) ۷

$$y=\frac{-۷\cos x}{\cos x+۲}\to\cos x=\frac{-۲y}{y+۷}\to -۱\le\frac{-۲y}{y+۷}\le ۱\to\frac{-۷}{۳}\le y\le ۷$$

مثال ۹۷) دامنه تابع به معادله $\sqrt[۴]{x-۱}+\sqrt{y+۱}=۳$ شامل چند عدد صحیح است؟

۱) ∞ ۲) ۸۲ ۳) ۳ ۴) ۹

$$\sqrt[۴]{x-۱}=۳-\sqrt{y+۱}\le ۳\qquad x\ge ۱$$

$$\sqrt[۴]{x-۱}\le ۳\to x-۱\le ۳^{۴}\to x\le ۸۲\Rightarrow ۱\le x\le ۸۲$$

مثال ۹۸) اگر بدانیم دامنه تابع f، $[0,4)$ و دامنه تابع g $[2,4)$ مطلوبست دامنه تابع $f(2x)+g(\frac{1}{x})$؟

۱) $[0,4]$ ۲) $[0,2]$ ۳) $(0/25,0/5]$ ۴) $[2,4]$

$$I)\ 0\le 2x\le 4\to 0\le x\le 2$$

$$II)\ 2\le\frac{1}{x}<4\to\frac{1}{4}<x\le\frac{1}{2}\qquad I\cap II=\left(\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right]$$

مثال ۹۹) هرگاه دامنه تابع $\frac{x^4+1}{x^2+ax+b}$ برابر $R-\{3\}$ باشد حاصل a+b کدام است؟

۱) ۶ ۲) ۱۵ ۳) ۳ ۴) ۳-

$$\Delta=0,\ x=3\Rightarrow(x-3)^2=x^2-6x+9=x^2+ax+b$$

$$a+b=9-6=3$$

۹-۱۱ چند مثال سخت بازی ضابطه

مثال ۱۰۰) در هر یک از موارد زیر ضابطه f(x) را پیدا کنید

$$a)\ f\left(\frac{x}{x^2+x+1}\right)=\frac{x^2}{x^4+x^2+1}=\left(\frac{x^4+x^2+1}{x^2}\right)^{-1}=\left(x^2+\frac{1}{x^2}+1\right)^{-1}=\left[\left(\frac{1}{t}-1\right)^2-2+1\right]^{-1}$$

$$\frac{x}{x^2+x+1}=t\Rightarrow\frac{1}{t}=\frac{x^2+x+1}{x}=x+\frac{1}{x}+1\to x+\frac{1}{x}=\frac{1}{t}-1\to x^2+\frac{1}{x^2}=\left(\frac{1}{t}-1\right)^2-2$$

$$\Rightarrow f(t)=\left[\left(\frac{1}{t}-1\right)^2-1\right]^{-1}$$

$$b)\ f(x+y,x-y)=2x^2+y^2+x+1\Rightarrow f(2,0)=?\ ,\ f(x,y)=?$$

$$x+y=2$$

$$\to x=y=1\to f(2,0)=2+1+1+1=4$$

$$x-y=0$$

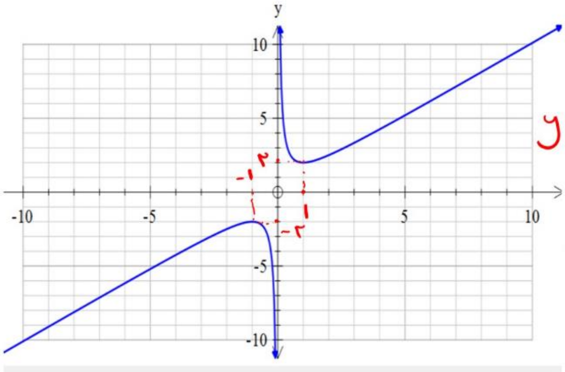
$$c)\ f(\sin(x))+4f(\cos(x))=\cos^2(x)\Rightarrow f(x)=?$$

راهنمایی : از روابط متمم زوایا استفاده کنید و جواب آخر : $f(x)=\frac{1-5x^2}{-15}$

۱۱-۱۰ چند مورد بسیار خاص !

۱-۱۰-۱۱ مثال مهم از ضعف نامساوی ها (با درنظرگیری محدود شدن دامنه)

تابع $x+\frac{1}{x}$



$y=f(x)=\frac{2x^4+6}{\sqrt{x^4+2}} \Rightarrow \frac{y}{2}=\frac{x^4+3}{\sqrt{x^4+2}}=\frac{x^4+2+1}{\sqrt{x^4+2}}$

$=\sqrt{x^4+2}+\frac{1}{\sqrt{x^4+2}}=u+\frac{1}{u} \quad ; \quad u\geq\sqrt{2}=1/4$

$\frac{y}{2}\geq\sqrt{2}+\frac{1}{\sqrt{2}} \rightarrow y\geq\frac{6}{\sqrt{2}}=3\sqrt{2}$

۲-۱۰-۱۱ متفرقه رسم

رسم $\frac{1}{f}$ از روی f (اختیاری)

1- باید ۰ های تابع f را بدست آورد که این نقاط همان مجانب‌های تابع 1/f می‌باشند.

2- اگر f، + باشد آنگاه $\frac{1}{f}$ نیز + هست و برعکس

3- هرجا fصعودی باشد $\frac{1}{f}$ نزولی است و برعکس

4- نقطه یابی

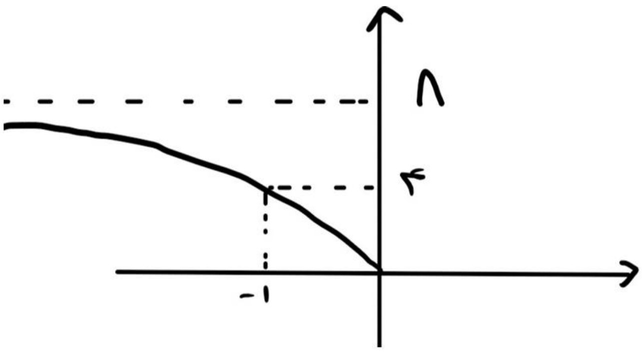
$f\to 0 \Rightarrow \frac{1}{f}=\frac{\text{عدد}}{0}=\infty$

$\frac{1}{0^+}=+\infty$

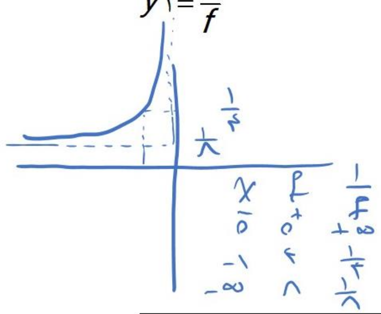
$\frac{1}{0^-}=-\infty$

$\frac{-3}{0^-}=+\infty$

مثال۵: با توجه به تابع $f(x)$ توابع زیر را رسم نمائید.



$y_1=\frac{1}{f}$ | $y_2=\frac{-f+2}{f}=-1+\frac{2}{f}$ | $y_3=\frac{-3}{-f(-2x+1)+2}$



۱۲ کاردرخانه

۱۳ یادداشت

امیر وفائی

مدرس ریاضیات دوره دوم متوسطه از پایه تا کنکور – متخصص هر دو رشته ریاضی و تجربی

طراح سوالات همه شاخه های ریاضی کانون فرهنگی آموزش (قلمچی)

رتبه ۲۶ کنکور سراسری

نفر اول دوره کارشناسی و کارشناسی ارشد مهندسی عمران دانشگاه صنعتی شریف

پذیرفته شده دوره دکتری مستقیم مهندسی عمران دانشگاه صنعتی شریف

رکوردار معدل دانشکده عمران دانشگاه صنعتی شریف از بدو تاسیس تا کنون

کسب عنوان دانشجوی نمونه دانشکده عمران و دانشگاه صنعتی شریف در سال ۱۳۹۴ و ۱۳۹۵

سابقه بیش از ۱۰ ترم استادیاری (دستیار استاد) در دروس مختلف تخصصی و عمومی دانشگاه صنعتی شریف

گذراندن دوره فرعی رشته ریاضی دانشگاه صنعتی شریف

استاد حل تمرین ریاضی دانشگاه صنعتی شریف

حضور در مدرسه شهیدبشهتی ۱ (تیزهوشان) از سال ۹۲ به عنوان مشاور و مدرس ریاضی

تالیف کتاب تا کنکور با همکاری مدرسه تیزهوشان

مبتکر برنامه های جمعبندی ویژه ۱۰۰-۱۰۰ در همه پایه ها با مشابهت ۱۰۰ درصدی در کنکور سراسری

آموزش مفهومی و متفاوت درس ریاضی منطبق بر برنامه دقیق تدریس و آزمون و برنامه تست

مدرس رتبه های برتر (تک رقمی و دو رقمی)

AMIRVAFAEI6

www.Donat.Academy