آموزش تخصصی ریاضیات

امیر وفائی

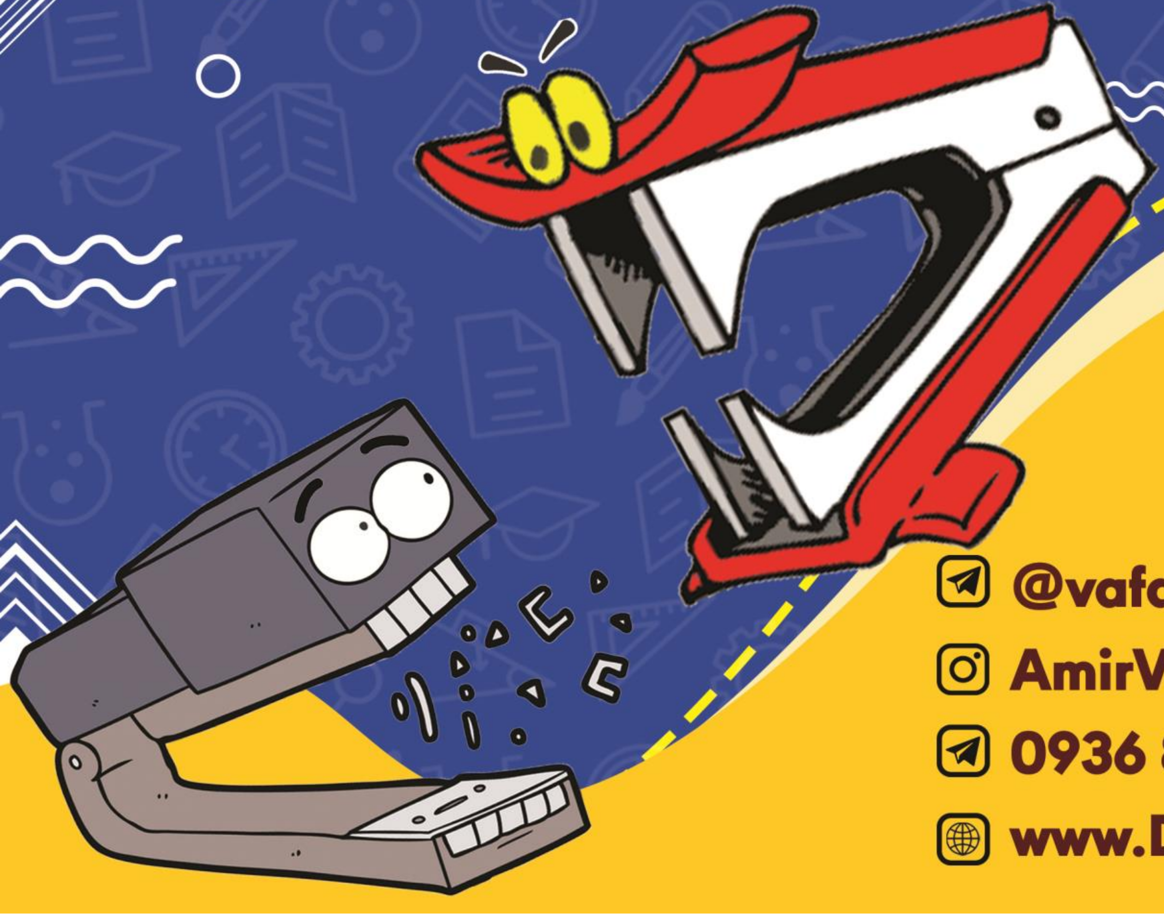
جزوات آموزش ریاضی

تابع

پایه یازدهم

فصل ۲ حسابان ۱ - رشته ریاضی

فصل ۳ ریاضی ۲ - رشته تجربی



@vafaei_math

AmirVafaei6

0936 879 1709

www.Donat.academy

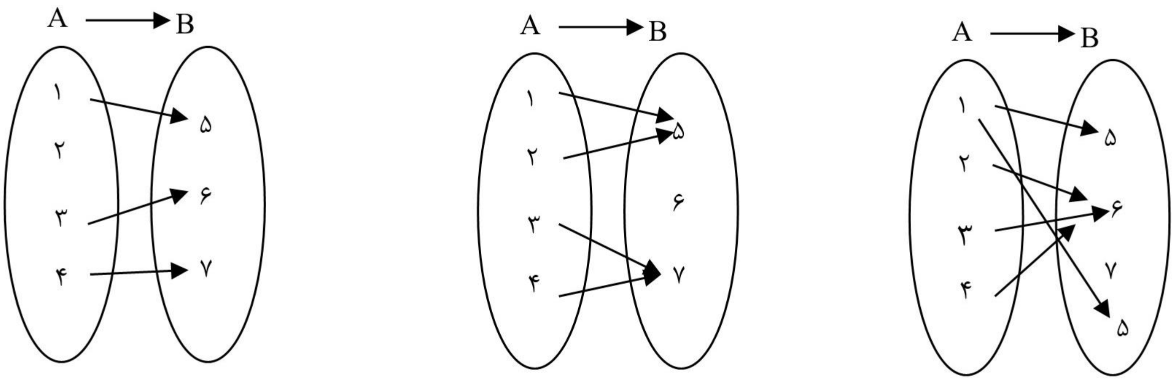
فهرست مطالب

۱ دوره تابع دهم

۱-۱تعریف تابع

تابع f از مجموعه A به مجموعه B رابطه‌ای است از این دو مجموعه که دارای هیچ دو زوج مرتب متمایزی با مولفه اول یکسان نباشد و علاوه بر آن لازم است که به هر عضو A ، عضوی از B نسبت داده شود و به شکل $f: A \to B$ نمایش می‌دهند. به طور خلاصه‌تر :

یک تابع از مجموعه A به مجموعه B رابطه‌ای است از این دو مجموعه که در آن به هر عضو A دقیقاً یک عضو B نسبت داده شود.



تذکر ۱) چندنکته مهم

دلیلی ندارد که به هر عضو B یک عضو از A نسبت دهیم.

امکان دارد به یک عضو B چند عضو از A نسبت دهیم.

از هر عضو A باید یک پیکان خارج شود و اگر چند پیکان خارج شده باشد، باید همه به یک عضو ختم شوند.

اگر از A پیکانی خارج نشود (حتی یک عضو آن)، آن رابطه، تابع نمی‌باشد.

۱-۲ بررسی تابع بودن

هر تابع را می‌توان به ٦ روش نمایش جدولی، توصیف کلامی، نمودار ون، مجموعه‌ای، نمودار مختصاتی و ضابطه‌ای نمایش داد که الگوریتم بررسی تابع بودن در هر روش الگوریتم خاص خود را دارد.

۱-۲-۱ نمایش جدولی

ساعت	۸	۹	۱۰	۱۱
دما	۱۵	۱۶	۱۷	۱۷

اگر هیچ یک از اعداد سطر بالای جدول (مولفه های اول) یکسان نباشد.

۱-۲-۲ نمایش توصیف کلامی

هرگاه تابع توصیف شده شرایط تعریف تابع را داشته باشد، آن توصیف بیانگر یک تابع می باشد.
اگر دستگاهی در مساله بیان شده باشد هرگاه خروجی قابل پیش بینی داشته باشد معرف یک تابع می باشد.

۱- رابطه بین انسان و گروه خونی : نسبت دادن گروه خون به انسان هست ولی برعکس خیر.

۲- رابطه مجموعه اعداد مثبت با ریشه ی دومشان : خیر ٤ ← ۲ ±

۱-۲-۳ نمایش نمودار ون یا پیکانی

چه وقت تابع نیست!

۱. هرگاه از یکی از اعضای مجموعه اول ۲ پیکان مختلف خارج گردد.
۲. هرگاه عضو یا اعضایی از مجموعه اول وجود داشته باشند که پیکانی از آن‌ها خارج نشده باشد

مثال صفحه قبلی

۱-۲-٤ نمایش مجموعه ای

بد نیست بدانیم تابع بودن شامل ۲ چک کلی می گردد :

یک: به همه اعضای A (مجموعه اول) ، یک عضو نسبت دهیم. (اگر در مساله A را داده باشند)

دو: به کسی از اعضای A، دو عضو متمایز نسبت ندهیم.

چه وقت تابع نیست!

وقتی که ۲ یا چند زوج مرتب با عضو اول مشترک، عضو دوم متمایز داشته باشند.

۱-۲-۵ نمایش نموداری یا تابع نموداری

چه وقت تابع نیست!

هرگاه خطی موازی محور yها (خروجی تابع) شکل تابع را در بیش از یک نقطه قطع کند.

۱-۲-٦ تابع ضابطه‌ای

چه وقت تابع نیست!

وقتی که برای یک ورودی، دو یا چند خروجی حاصل گردد. به چند روش می‌توان در این دسته عمل نمود.

۱-۲-٦-۱ رسم نمودار

پس از رسم نمودار در صورت امکان، از بخش قبلی استفاده کن!

۱-۲-٦-۲ روش مثال نقض

یعنی باید یک x خوب پیدا کنی که در نتیجه اون ۲ یا چند y حاصل بشه! مثلاً همیشه ۰ و او ۱- گزینه‌های خوبی هستند . و .....

مثـــال ۱) کدام یک از روابط زیر تابع می‌باشند؟

۱) $۲y^۲ - ۴y + ۳x = ۰$

$x = ۰ \Rightarrow ۲y^۲ - ۴y = ۰ \rightarrow ۲y(y - ۲) = ۰ \Rightarrow y = ۰,۲ \rightarrow$ ....

۲) $y^۲ - ۶y + x^۲ + ۲x + ۱۰ = ۰$

$$\left(y^۲ - ۶y + ۹\right) + \left(x^۲ + ۲x + ۱\right) = (y - ۳)^۲ + (x + ۱)^۲ = ۰ \rightarrow \left|\begin{matrix} x = -۱ \\ y = ۳ \end{matrix}\right.$$ تابع تک نقطه ای

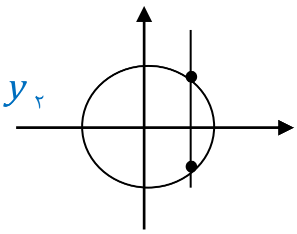
۳) $|y - ۳| + |x| + ۷ = ۰$

$|y - ۳| + |x| = -۷ \quad (+ = -)$!!!!!!

تذکـــر ۲) در مورد مثال نقض: اگر یک x بذاری و به یک یا هیچ y برسی هیچ نتیجه ای نمیتونی بگیری و این روش صرفا برای نقض کردن می باشد و نه اثبات!

۳-۶-۲-۱ روش اثبات تابع بودن(روش عمومی)

در این روش دو زوج (x۱,y۱) و (x۲,y۲) را در رابطه قرار می‌دهیم و باید از رابطه x۱=x۲ به رابطه y۱=y۲ برسیم تا اثبات شود که رابطه تابع می‌باشد. برای فهم کامل این روش به مثال‌ها و نکات زیر توجه کنید.



$1)\ x^4y^5=1$

$$x^4=\frac{1}{y^5}\qquad x_1=x_2\to x_1^4=x_2^4\to\frac{1}{y_1^5}=\frac{1}{y_2^5}\to y_1^5=y_2^5\to y_1=y_2$$

$2)\ x^2+y^2=4\ \Rightarrow$

$$\to x_1=x_2\to x_1^2=x_2^2\to 4-y_1^2=4-y_2^2\to y_1^2=y_2^2\to y_1=\pm y_2$$

۱-۲-۷ چند نکته و مثال مهم در خصوص تابع بودن

بررسی چند جمله ای و خط به عنوان تابع :

$f(x)=ax+b$

$x=1$

$y=1$

$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+.....+a_2x^2+a_1x+a_0\qquad f(x)=3x^4+x^3-4x+6$

سه صورت زیر تابع نیستند !

$(x-a)^2+(y-b)^2=R^2\qquad \frac{(x-a)^2}{c^2}+\frac{(y-b)^2}{d^2}=1\qquad |x-a|+|y-b|=c>0$

یک مثال و نکته مهم

مثال ۲) آیا رابطه $y^3+y=x+2$ تابع است ؟

نکته خفن : رابطه $y^3+ay=f(x)$ برای هر a مثبت، تابع هست .

تابع بودن یک رابطه چند ضابطه ای

اولاً باید هر رابطه در محدوده تعریف خود یک تابع باشد.

دوماً باید در نقاط مشترک دامنه ها، خروجی تابع محاسبه شود و اگر اعداد بدست آمده برابر بودند رابطه داده شده تابع هست و در غیر اینصورت تابع نیست.

مثال ۳) تابع بودن رابطه دو ضابطه ای مقابل را بررسی کنید.

$$f(x)=\begin{cases}x^2+1\ ,\ x\ge 1\\ 2x\quad\ ,\ x\le 1\end{cases}$$

$1)\ x=y+2|y|+1$

۱-۳ تابع خطی

$y=f(x)=ax+b \Rightarrow a$: شیب خط و b= عرض ازمبدا

$y=f(x)=ax \rightarrow f(tx)=tf(x), f(x_۱+x_۲)=f(x_۱+x_۲)=f(x_۱)+f(x_۲)$

$f(tx)=a(tx)=t(ax)=tf(x)$

مثـــال ٤) اگر f(x) تابع خطی باشد و در مورد آن بدانیم $۳f(x+۲)-f(x)=۲x+۱۰$، ضابطه ی آن را پیدا کنید.

$f(x)=ax+b \rightarrow f(x+۲)=a(x+۲)+b=ax+۲a+b$

$\rightarrow ۳f(x+۲)-f(x)=۳ax+۶a+۳b-(ax+b)=۲ax+۶a+۲b=۲x+۱۰$

$\rightarrow ۲a=۲, ۶a+۲b=۱۰$

مثـــال ٥) مقدار a را طوری تعیین کنید که تابع $\{(۳,۴),(۲,۱),(۱,a)\}$ یک تابع خطی باشد.

۱-٤ سه ویژگی اساسی تابع(دامنه- هم‌دامنه - برد)

با فرض وجود تابع f از مجموعه A به B

۱-٤-۱ تعاریف

- دامنه: به مجموعه تمام مولفه‌های اول زوج مرتب‌های تابع f دامنه تابع با نماد D_f گویند. که معادل مجموعه A می‌باشد. $D_f=\{x \mid (x,y)\in f\}$
- برد: به مجموعه تمام مولفه‌های دوم زوج مرتب‌های تابع f برد تابع با نماد R_f گویندد واقع برد زیر مجموعه‌ای از هم‌دامنه می‌باشد ! $R_f=\{y \mid (x,y)\in f\}$
- ضابطه: به یک نوع رابطه که بین ورودی و خروجی تابع برقرار می‌گردد ضابطه گفته می‌شود و در واقع عبارت ریاضی یک تابع همان ضابطه آن می‌باشد.
- هم‌دامنه: به مجموعه دوم یا مجموعه پایان یک تابع هم‌دامنه گویند که همان مجموعه B می‌باشد و تمام مولفه دوم‌ها از آن‌جا انتخاب می‌گردند.(هر مجموعه دلخواه شامل................................... ....)

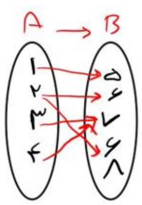
۱-٤-۲ محاسبه دامنه و برد

- تعریف زوج مرتبی:

$f=\{(۲,۳),(۴,۲),(۳,۲),(۱,۲)\}$

$D_f=$ $\qquad\qquad$ $R_f=$

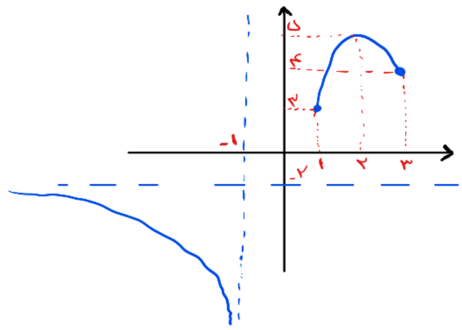
- نمودار ون:

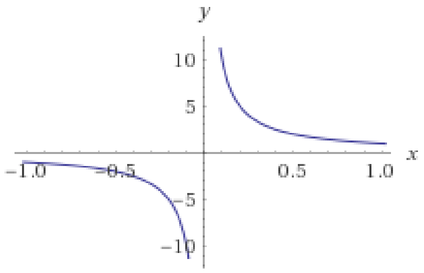


$D_f=$

$R_f=$

- نمودار مختصاتی: تصویر نقاط نمودار بر روی محور x ها مجموعه نقاط دامنه را تشکیل می‌دهد و بر محور y ها مجموعه نقاط برد را تشکیل می دهد.





- از روی ضابطه

مثال ۶) دامنه و برد تابع چند ضابطه‌ای زیر را بدست آورید.(تابع علامت یا sgn)

$$f(x)=\begin{cases} ۱ & x>۰ \\ ۰ & x=۰ \\ -۱ & x<۰ \end{cases}$$

حال به کمک تقسیم بندی زیر با روش‌های مختلف محاسبه دامنه و برد از روی ضابطه آشنا می‌شویم.

۱-٤-۳ توابع چند جمله‌ای

صورت کلی یک تابع چند جمله‌ای به فرم زیر می‌باشد که a۱ تا an اعداد حقیقی و n یک عدد طبیعی می‌باشد.
$$f(x)=a_n x^n+a_{n-۱}x^{n-۱}+.....+a_۲x^۲+a_۱x+a_۰$$

دامنه این توابع اگر ذکر نشود، مجموعه اعداد حقیقی می‌باشد و برد آن‌ها با حل کردن x بر حسب y و برقراری شرط x معین می‌گردد. این روش، روش اساسی محاسبه برد نام دارد!

مثال ۷) دامنه و برد تابع زیر را بدست آورید.

$$y=f(x)=x+۱$$
$$D_f=\mathbb{R}$$
$$D_f=[۲,۶]$$

$$y=f(x)=-x^۲+۱\Rightarrow D_f=\mathbb{R}$$
$$R_f\Rightarrow y=-x^۲+۱\Rightarrow y-۱=-x^۲\leq ۰\rightarrow y-۱\leq ۰\rightarrow y\leq ۱\rightarrow R_f=(-\infty,۱]$$

۱-٤-٤ توابع گویا

هر تابع به شکل $f(x)=\dfrac{p(x)}{q(x)}$ که در آن $p(x)$ و $q(x)$ یک چند جمله ای باشند را تابع گویا گویند. طبیعیست که باید مراقب **مخرج کسر** باشید !

مثـال ۸) دامنه و برد تابع زیر را به دست آورید.

$$y=f(x)=\frac{x+۲}{x^{۲}-۴}$$

$$D_f=\mathbb{R}-\{-۲,۲\}$$ ساده DONT

$$R_f\to y=\frac{۱}{x-۲}$$ ساده Must

$$y=\frac{۱}{x-۲}\to x-۲=\frac{۱}{y}\to x=\frac{۱}{y}+۲=\frac{۲y+۱}{y}\to y\neq ۰$$

$$x\neq -۲\Rightarrow y\neq\frac{۱}{-۲-۲}=-\frac{۱}{۴}\Rightarrow R_f=\mathbb{R}-\{۰,-\frac{۱}{۴}\}$$

تذکـر ۳) تابع $\frac{۱}{x}$ دامنه و برد برابر با $\mathbb{R}-\{۰\}$ دارد!

تذکـر ۴) تابع ساده شدنی: در این توابع باید دقت نمود که ریشه های مخرج که ساده شدند را از صورت نهایی برای محاسبه برد خارج نمائیم.

تذکـر ۵) تمام توابع چند جمله‌ای درجه فردی که دامنه محدود نداشته باشند برد شان مجموعه اعداد حقیقی می‌باشد

تذکـر ۶) در محاسبه دامنه ساده سازی ممنوع می باشد ولی در محاسبه برد بدمان نمی آید!

مثـال ۹) دامنه و برد تابع زیر را بدست آورید

$$y=f(x)=\frac{x^{۲}+۱}{x^{۲}-۱}$$

$$yx^{۲}-y=x^{۲}+۱\Rightarrow yx^{۲}-x^{۲}=y+۱$$

$$\to x^{۲}(y-۱)=y+۱\to x^{۲}=\frac{y+۱}{y-۱}\geq ۰\Rightarrow y\neq ۱,\frac{y+۱}{y-۱}\geq ۰$$

$$\frac{y+۱}{y-۱}\geq ۰\to y>۱ \text{ or } y\leq -۱\Rightarrow R_f=(-\infty,-۱]\cup(۱,+\infty)$$

۱-٤-۵ توابع اصم (گنگ- رادیکالی)

توابعی را اصم گویند که متغیر x آن‌ها زیر رادیکال باشد، به عبارت دیگر توان x یا عبارت بر حسب x کسری می‌باشد. شکل عمومی: $y=f(x)=\sqrt[n]{p(x)}$

اگر n فرد باشد و p یک چند جمله‌ای دامنه برابر R می‌باشد و اگر **n زوج** باشد، **زیر رادیکال نباید منفی باشد.**

برای تعیین برد از روش اساسی استفاده می‌گردد.

مثـال ۱۰) دامنه و برد تابع زیر را بدست آورید.

$$y=f(x)=\sqrt{x^{۲}-۴x+۵}$$

٦-٤-١ تیپ نامساوی ها

سه مثال و نکته زیر را در یابید !

مثال ۱۱) برد $y=f(x)=\dfrac{2x^4+4}{\sqrt{x^4+1}}$ تابع را بدست آورید

$$u>0\to u+\frac{1}{u}\geq 2 \qquad\qquad u<0\to u+\frac{1}{u}\leq -2$$

$$y=2\frac{x^4+2}{\sqrt{x^4+1}}\Rightarrow\frac{y}{2}=\frac{(x^4+1)+1}{\sqrt{x^4+1}}\Rightarrow\frac{y}{2}=\frac{(x^4+1)}{\sqrt{x^4+1}}+\frac{1}{\sqrt{x^4+1}}$$

$$\frac{y}{2}=\sqrt{x^4+1}+\frac{1}{\sqrt{x^4+1}}\Rightarrow\sqrt{x^4+1}>0:$$

$$\frac{y}{2}\geq 2\to .....$$

مثال ۱۲) دامنه و برد تابع زیر را بدست آورید.

$$f(x)=\left|2\sin(x)-4\cos(x)-1\right| \quad\to D_f=R$$

$$-\sqrt{a^2+b^2}\leq a\sin(x)+b\cos(x)\leq\sqrt{a^2+b^2}$$

$$R_f:-\sqrt{2^2+(-4)^2}\leq 2\sin x-4\cos x\leq\sqrt{2^2+(-4)^2}$$

$$\to -5/....=-\sqrt{20}-1\leq 2\sin(x)-4\cos(x)-1\leq\sqrt{20}-1=3/...$$

$$0\leq\left|2\sin(x)-4\cos(x)-1\right|\leq 1+\sqrt{20}\to R_f:\left[0,1+\sqrt{20}\right]$$

مثال ۱۳) برد تابع $f(x)=2\tan^2x+8\cot^2x$ را بدست آورید.

$$\forall x,y>0\to x+y\geq 2\sqrt{xy} \qquad , \qquad \forall x,y<0\to x+y\leq -2\sqrt{xy}$$

$$y=2\tan^2x+8\cot^2x\Rightarrow 2\tan^2x\geq 0,\ 8\cot^2x\geq 0$$

$$y=2\tan^2x+8\cot^2x\geq 2\sqrt{\left(2\tan^2x\right)\times\left(8\cot^2x\right)}$$

$$y\geq 2\sqrt{16\left(\tan^2x\cot^2x\right)}=8\ \Rightarrow R_f=[8,+\infty)$$

همچنین بدانید بعضا نا مساوی ها در حل مسائل ضعف دارن و نمی توان به عنوان یک روش خیلی قابل اعتماد از آن ها استفاده کرد (یک مثال خوب در بخش متفرقه)

خلاصه ای از روش محاسبه دامنه :

دقت به مخرج کسر که صفر نشود + زیر رادیکال فرجه زوج : بیشتر یا مساوی صفر

خلاصه روش محاسبه برد :

تنها سازی x –یک اتفاق پر واضح در قسمت x ها – مشکل در قسمت y (مثل صفر شدن مخرج – اعمال شرط x (همان دامنه)

یک سری دقت مثل :

دقت در توان زوج رساندن + دقت در حضور رادیکال فرجه زوج + شبیه سازی و خلاقیت!

۷-٤-۱ درجه ۲ و دامنه محدود

در مورد تابع درجه ۲ ، $y=f(x)=ax^{۲}+bx+c$ اگر ضریب a مثبت باشد منحنی min دارد و برد آن بصورت $R_f=\left[\min,+\infty\right)$ و اگر ضریب a منفی باشد max دارد و برد آن بصورت $R_f=\left(-\infty,\max\right]$ می‌باشد که مقدار این حداقل و حداکثر برابر با $\frac{-\Delta}{۴a}=\frac{۴ac-b^{۲}}{۴a}$ می‌باشد.

مثال ١٤) برد تابع $f(x)=x^{۲}-۴x+۵$ را بدست آورید.

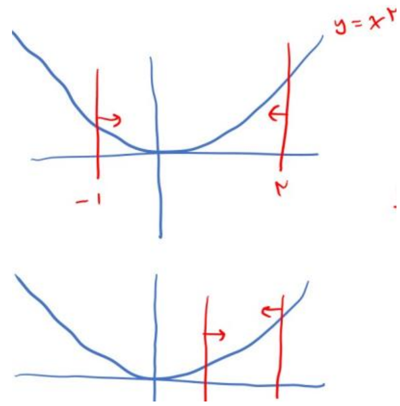
$$f(x)=x^{۲}-۴x+۵\rightarrow a>۰,\frac{-\Delta}{۴a}=f\left(\frac{-b}{۲a}\right)=f(۲)=۱\rightarrow R_f=\left[۱,+\infty\right)$$
$$y=x^{۲}-۴x+۵=x^{۲}-۴x+۴-۴+۵=(x-۲)^{۲}+۱\rightarrow$$
$$(x-۲)^{۲}\geq ۰\rightarrow (x-۲)^{۲}+۱\geq ۱\rightarrow y\geq ۱\rightarrow R_f=\left[۱,+\infty\right)$$

حال اگر دامنه محدود بود چه کنیم: بازهم مربع کامل

مثال ۱۵) برد تابع $f(x)=x^{۲}-۴x+۵$ را با دامنه $[۰,۳]$ بدست آورید.

$$y=x^{۲}-۴x+۵=x^{۲}-۴x+۴-۴+۵=(x-۲)^{۲}+۱$$
$$D_f=[۰,۳]\rightarrow ۰\leq x\leq ۳\rightarrow -۲\leq x-۲\leq ۱\rightarrow$$
$$۰\leq (x-۲)^{۲}\leq ۴\rightarrow ۱\leq (x-۲)^{۲}+۱\leq ۵\rightarrow R_f=[۱,۵]$$

اما اگر دامنه تابع محدود بود چه کنیم؟



$R_f=(O,O)$

اگر بازه داده شده ، شامل راس باشد:

کاندیدا ← f (رأسی) و f (آخر) و f (اول)

اگر بازه داده شده ، شامل راس نباشد:

کاندیدا ← f (آخر) و f (اول)

حل مثال :

شبیه سازی مثلثاتی !! (بین ۱- و ۱+)

تذکر ۷) **برد در توابع محدود شده چه قیدی دارد؟ کافیست آن قسمتی از برد که مربوط به دامنه حذف شده است را از برد کل تابع خارج نمائید. اصلا تابع محدود شده یعنی چی؟ یعنی تابع یک دامنه‌ای داشته ولی ما قسمت خاصی از دامنه تابع برایمان مهم می‌باشد! (مثال دیدیم!)**

۸-٤-۱ چند مثال و روش جالب (شبیه سازی + دلتا)

مثال ۱۶) برد توابع زیر را بدست آورید

$a) = f(x) = x + ۲\sqrt{x-۱} + ۵$

$f(x) = \left(\sqrt{x-۱}+۱\right)^{۲} + ۵ \to \sqrt{x-۱} \geq ۰ \to \sqrt{x-۱}+۱ \geq ۱ \to \left(\sqrt{x-۱}+۱\right)^{۲} \geq ۱ \to$
$\left(\sqrt{x-۱}+۱\right)^{۲} + ۵ \geq ۶ \to f(x) \geq ۶ \to R_f = [۶, +\infty)$

$b) y = -۳\sin^{۲}(x) + ۴$

$۰ \leq \sin^{۲}x \leq ۱ \to -۳ \leq -۳\sin^{۲}x \leq ۰ \to ۴-۳ \leq ۴-۳\sin^{۲}x \leq ۴$

دو مورد دیگر در متفرقه

مثال ۱۷) دامنه و برد تابع زیر را بدست آورید

$$y = \frac{x^{۲}-۱}{x^{۲}+۱}$$

روش دلتا

اگر یک رابطه بر حسب توان دوم x داریم و می‌خواهیم برد آن را بدست آوریم کافیست دلتای معادله درجه ۲ برحسب x را بزرگتر مساوی ۰ قرار دهیم.

چرا؟

$x^{۲}y + ۳x + y^{۲} = ۰$

فقط در این روش اکثرا از طرفین وسطین استفاده میکنید و بهتر است که نقاط مرزی را کنترل کنید!

$y = \frac{x^{۲}-۱}{x^{۲}+۱} \to D_f = \mathbb{R}, R_f \to yx^{۲}+y = x^{۲}-۱ \to yx^{۲}+y-x^{۲}+۱ = ۰ \to$
$(y-۱)x^{۲} + (y+۱) = ۰ \to \Delta = ۰^{۲} - ۴(y-۱)(y+۱) \geq ۰ \to$
$-۴(y^{۲}-۱) \geq ۰ \to y^{۲}-۱ \leq ۰ \to -۱ \leq y \leq ۱ \to .... \to -۱ \leq y < ۱$

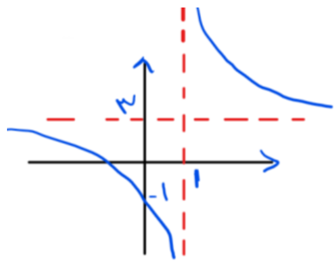
۱-۵ تابع هموگرافیک

مثــال ۱۸) تابع مقابل را رسم کنید و دامنه و برد آن را از روی شکل و ضابطه محاسبه کنید

$$y = f(x) = \frac{۳x + ۱}{x - ۱} \to D_f = \mathbb{R} - \{۱\}$$

$$yx - y = ۳x + ۱ \Rightarrow yx - ۳x = y + ۱ \Rightarrow x(y - ۳) = y + ۱$$

$$\Rightarrow x = \frac{y + ۱}{y - ۳} \quad \Rightarrow y \neq ۳ , \quad \Rightarrow R_f = \mathbb{R} - \{۳\}$$



برای رسم تابع $y = \frac{ax + b}{cx + d}$ باید مراحل زیر طی شود:

خط چین راهنمای افقی : مجانب افقی : $y = \frac{a}{c}$

خط چین راهنمای عمودی : مجانب قائم : $x = \frac{-d}{c}$

علامت $(ad - bc)$: ۲ تیپ افزایشی(+) و تیپ کاهشی (-)

۱-۶ بررسی دو مسئله مهم دامنه

باید دانست که دامنه یک تابع مثل f(x) به معنای آن‌چه می‌باشد که می‌تواند جلوی f بشیند و همچنین حدود x را مشخص می‌نماید.

مسئله اول: دامنه f(x) را بدهند و دامنه f(u(x)) را بخواهند:

روش حل: u را در بازه دامنه f قرار دهید و برای x نامعادله حاصل را حل کنید. مجموعه جواب بدست آمده جواب مسئله می‌باشد!

مسئله دوم: دامنه f(u(x)) را بدهند دامنه تابع f(x) را بخواهند:

روش حل: دامنه داده شده حد و حدود x را معین می‌کند نه u . پس از روی حدود x ، حدود u را بیابید و حدود بدست آمده، جواب مسئله می‌باشد!

مثــال ۱۹) اگر دامنه تابع f ، $D_f = [-۱,۱]$ باشد. مطلوب است محاسبه دامنه تابع g بصورت $g(x) = ۲f(۲x - ۳)$

$$-۱ \leq ۲x - ۳ \leq ۱ \to ۱ \leq x \leq ۲ : D_g$$

مثــال ۲۰) اگر دامنه تابع g(x) با تعریف $g(x) = f(x - ۲)$ ، برابر $[۰,\infty)$ باشد . مطلوب است محاسبه دامنه تابع f(x)

$$x \geq ۰ \to x - ۲ \geq -۲ \to D_f = [-۲,+\infty)$$

۷-۱ بازی ضابطه

مثال ۲۱) اگر $g(x)=\frac{۱-۳x}{x+۲}, f(x)=\frac{۲x+۳}{۲-x}$ باشند، مطلوب است محاسبه $g(f(x))$؟

$$g(f(x))=g\left(\frac{۲x+۳}{۲-x}\right)=\frac{۱-۳\left(\frac{۲x+۳}{۲-x}\right)}{۲+\left(\frac{۲x+۳}{۲-x}\right)}=\frac{\frac{۲-x-۳(۲x+۳)}{۲-x}}{\frac{۲(۲-x)+(۲x+۳)}{۲-x}}=\frac{-۷x-۷}{۷}=-x-۱$$

مثال ۲۲) اگر $f(x)=x^۲+۲x+۲, f(g(x))=x^۲-۴x+۵$ باشد ضابطه $g(x)$ را بدست آورید .

$$f(g(x))=g^۲+۲g+۲=x^۲-۴x+۵$$
$$(g+۱)^۲+۱=(x-۲)^۲+۱\Longrightarrow(g+۱)^۲=(x-۲)^۲\rightarrow$$

مثال ۲۳) اگر $f\left(\frac{۳x-۱}{۲}\right)=\sqrt{x}$ باشد، ضابطه f(x) را بدست آورید

$$\frac{۳x-۱}{۲}=t\rightarrow ۳x-۱=۲t$$
$$\rightarrow ۳x=۲t+۱\rightarrow x=\frac{۲t+۱}{۳}\rightarrow f(t)=\sqrt{\frac{۲t+۱}{۳}}\rightarrow f(x)=\sqrt{\frac{۲x+۱}{۳}}$$

تذکر ۸) در بعضی از سوالات این نوع باید از شبیه سازی استفاده کرد!

$$f(x+\frac{۱}{x})=x^۲+\frac{۱}{x^۲}\Rightarrow f(x)=?$$

مثال ۲۴) اگر $f\left(\frac{۲x-۱}{x}\right)=x^۲+۱$ باشد مقدار $f(-۱)$ را بدست آورید ؟

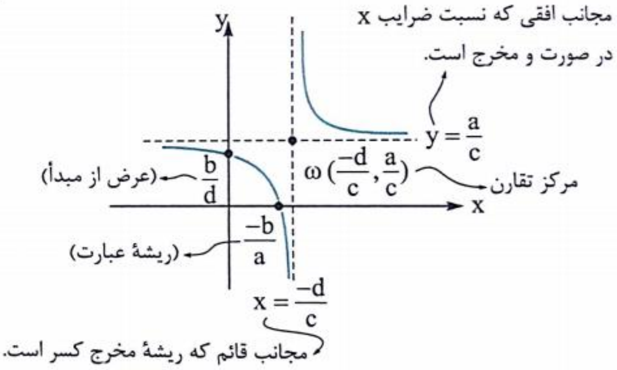
$$\frac{۲x-۱}{x}=-۱\rightarrow ۲x-۱=-x\rightarrow ۳x=۱\rightarrow x=\frac{۱}{۳}\rightarrow f(-۱)=\frac{۱}{۹}+۱$$

اگر ضابطه $f(۱+\sin^۲x)$ را بخواهیم بدست آوریم ، ابتدا باید ضابطه $f(x)$ را بدست آوریم (نوع دوم) و سپس بجای x عبارت $(۱+\sin^۲x)$ را قرار دهیم (نوع اول).

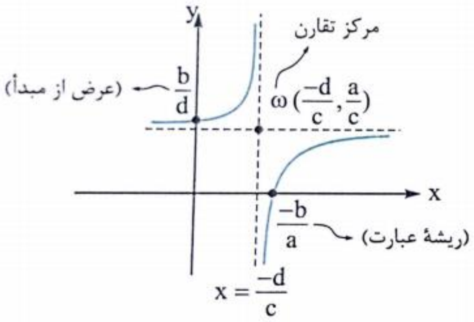
به عنوان تمرین انجام دهید$(۱+\frac{۱}{\cos^۴x})$

۱-۸ شکل های توابع معروف

فرض $ad - bc < 0$:

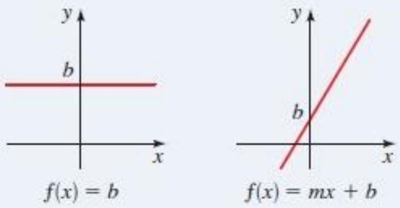


با فرض $ad - bc > 0$:



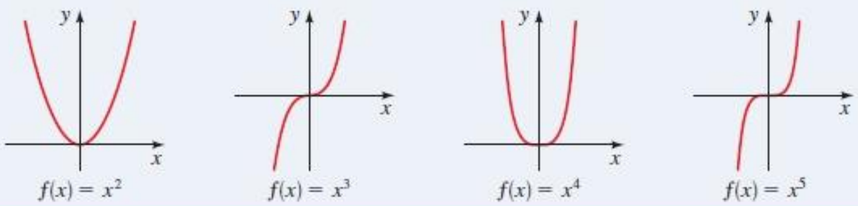
توابع خطی

$f(x) = mx + b$



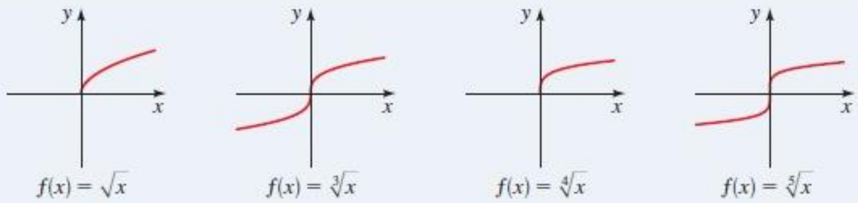
توابع توان دار

$f(x) = x^n$



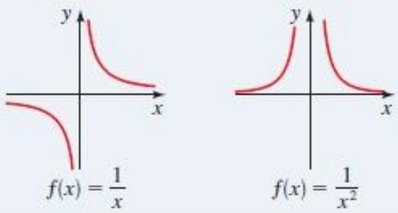
توابع رادیکالی

$f(x) = \sqrt[n]{x}$



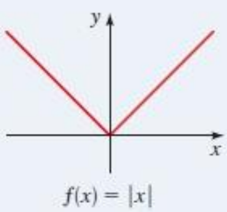
توابع کسری

$f(x) = \frac{1}{x^n}$



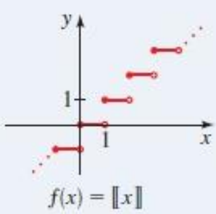
تابع قدر مطلق

$f(x) = |x|$



تابع جزء صحیح

$f(x) = [\![x]\!]$

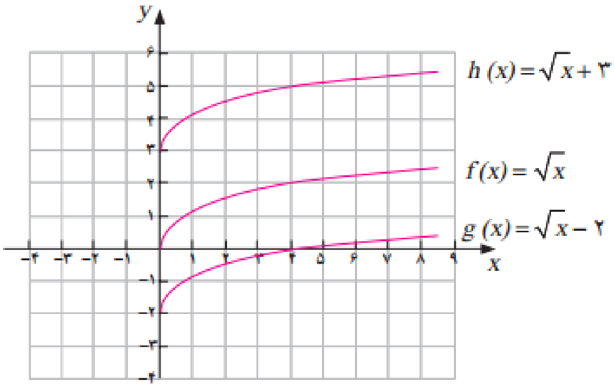


۹-۱ رسم توابع

۱-۹-۱ انتقال و مقیاس

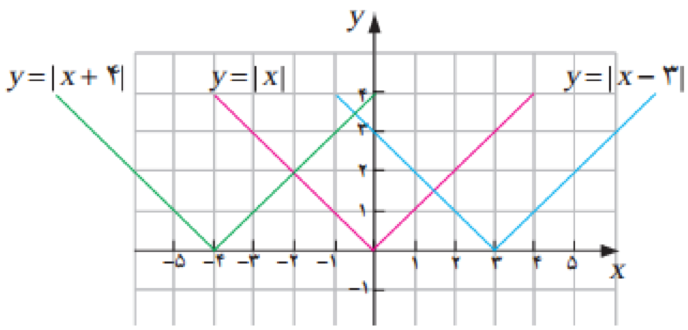
۱-۱-۹-۱ انتقال عمودی رسم $f(x)+a$

اگر a مثبت باشد به اندازه a واحد به سمت بالا و اگر منفی باشد به همان اندازه به سمت پائین نمودار را انتقال می‌دهیم. البته بدون تغییر در طول نمودار.



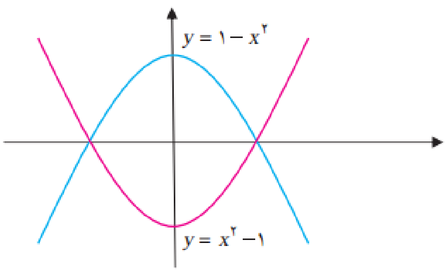
۱-۹-۱-۲ انتقال افقی رسم $f(x+a)$

اگر a، مثبت باشد، نمودار در راستای محور طول‌ها به اندازه a واحد به سمت چپ منتقل می‌گردد بدون تغییر در عرض نمودار و اگر منفی باشد، نمودار در راستای محور طول‌ها به اندازه a واحد به سمت راست منتقل می‌گردد بدون تغییر در عرض نمودار.



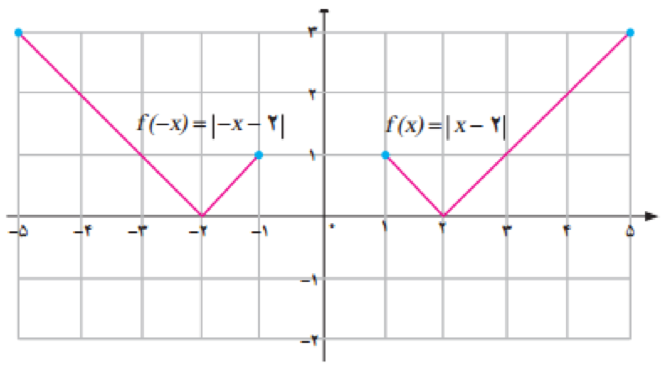
۱-۹-۱-۳ رسم قرینه تابع $-f(x)$

کافیست نمودار را نسبت به محور طول قرینه کنیم.



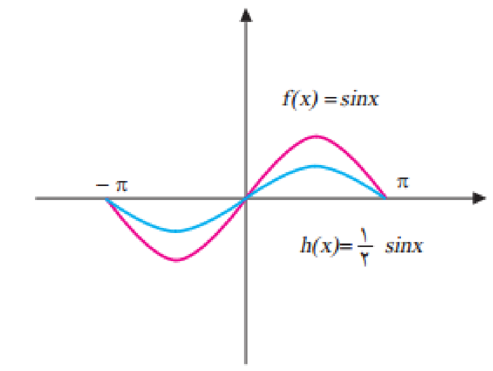
۱-۹-۱-٤ رسم $f(-x)$

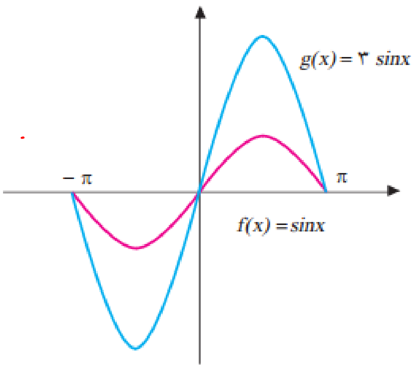
کافیست نمودار را نسبت به محور عرض قرینه کنیم.



۵-۱-۹-۱انبساط و انقباض عرضی رسم $af(x)$ و $a>0$

کافیست عرض نمودار را در a ضرب کنیم و اگر a>۱ باشد انبساط در راستای محور عرض رخ می‌دهد و اگر a<۱ انقباض رخ می‌دهد!

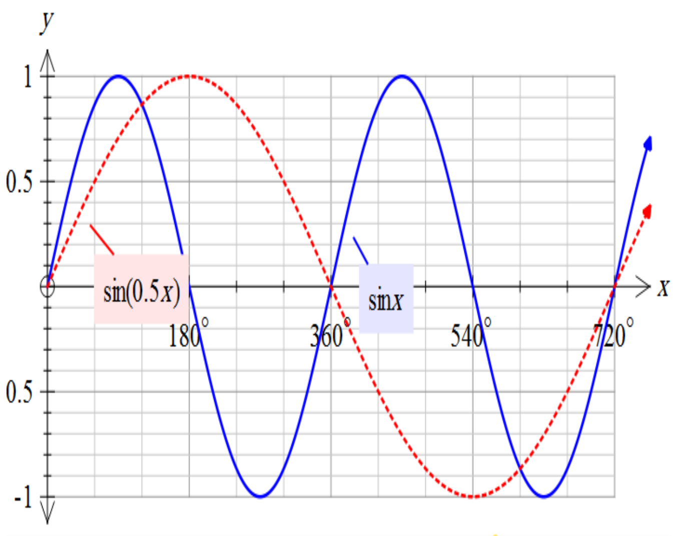


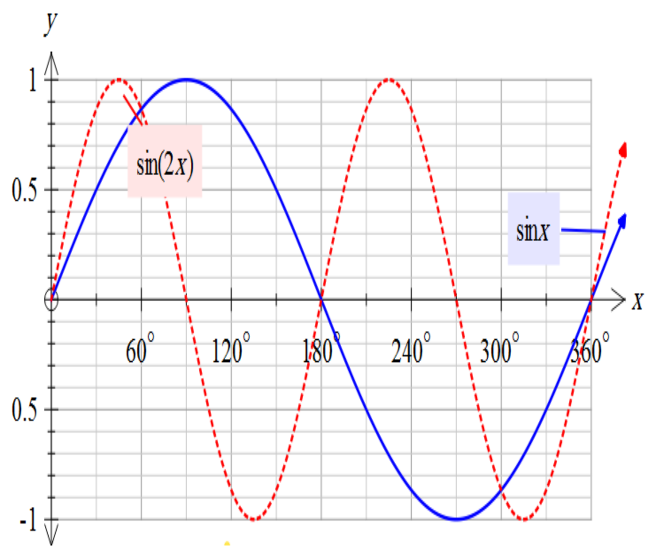


اگر a منفی بود چطور ؟

۱-۹-۱-٦ انبساط و انقباض طولی رسم $f(ax)$ و $a>0$

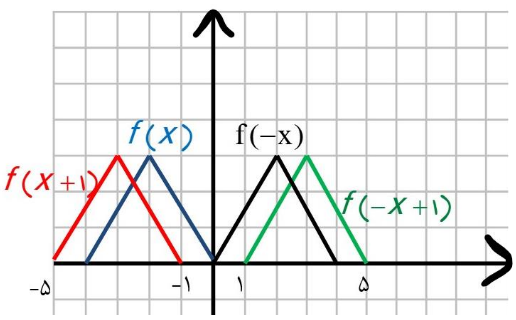
اگر a>۱ باشد نمودار بدون تغییر در عرض در راستای محور افقی منقبض می‌گرددو ضریب این انقباض $\frac{1}{a}$ می‌باشد. و اگر a<۱ باشدمشابه قبلی اما منبسط می‌گردد!!!!





اگر a منفی بود چطور ؟

مثال ۲۵) نمودار تابع $f(-x)$ داده شده است نمودار تابع $f(-x+1)$ را رسم نمائید.(روش دامنه و روش برگرداندن خود تابع $f(x)$)



$$Df_{(-x)}=[0,4]\Rightarrow Df_{(x)}=[-4,0]$$
$$Df_{(-x+1)}\Rightarrow -4\le -x+1\le 0\Rightarrow$$
$$-5\le -x\le -1\Rightarrow 1\le x\le 5$$

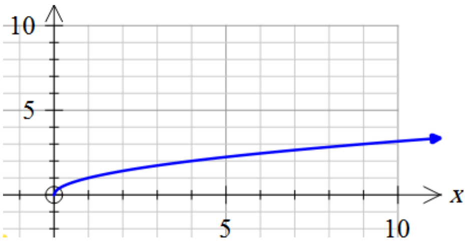
دقت دارید برعکس شده !!!!

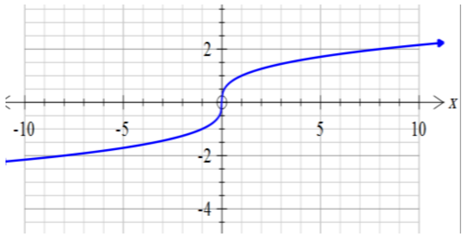
۳۲۱٤

۲ ورود به یازدهم

تابع گویا:

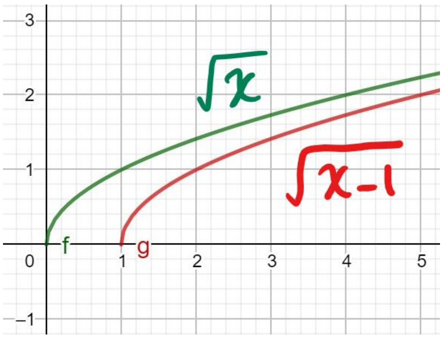
تابع اصم: تابع ریشه n ام

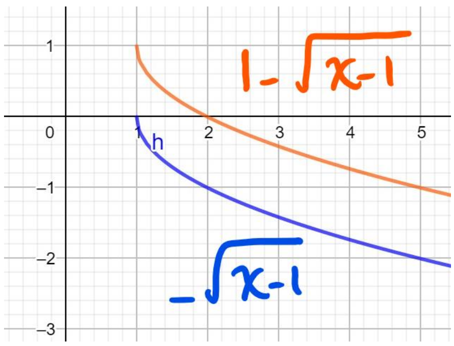




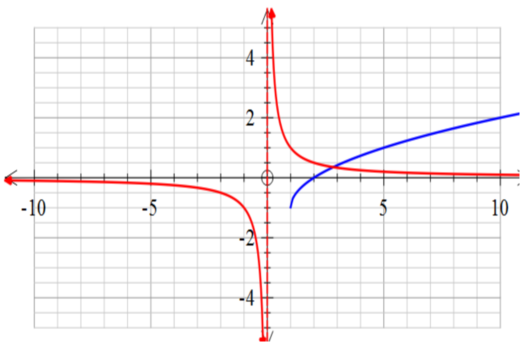
$f(x)=\sqrt{x}, D_f=[0,+\infty)=R_f$ $\quad$ $f(x)=\sqrt[3]{x}, D_f=\mathbb{R}=R_f$

مثال ۲۶) نمودار تابع $f(x)=1-\sqrt{x-1}$ را رسم کنید





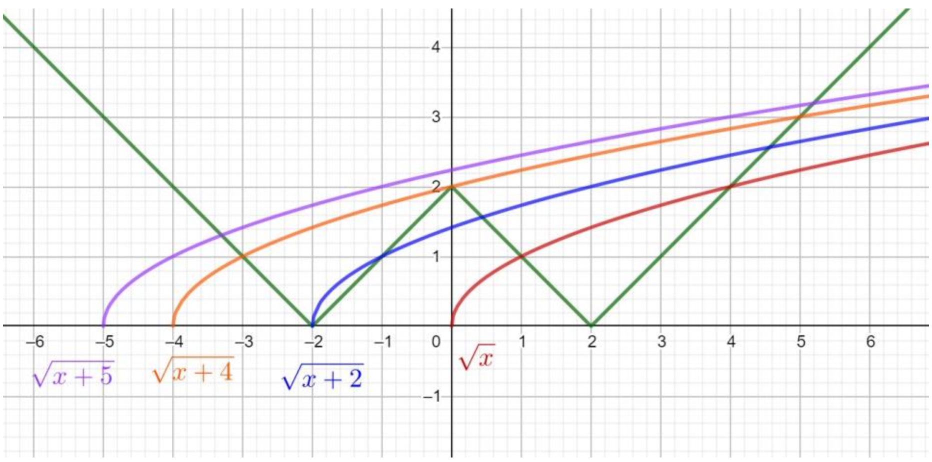
مثال ۲۷) معادله $x\sqrt{x-1}=x+1$ چند جواب دارد؟



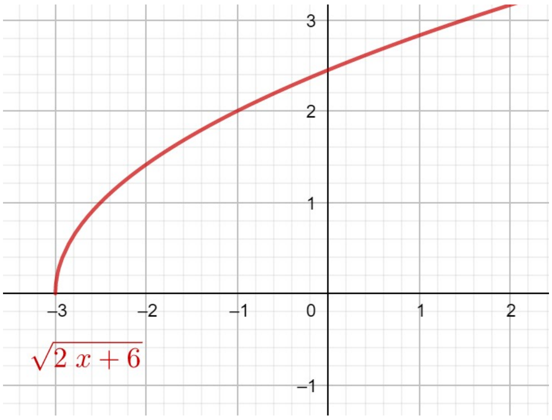
$$\sqrt{x-1}=\frac{x+1}{x}=1+\frac{1}{x}$$

$$\sqrt{x-1}-1=\frac{1}{x}$$

مثال ۲۸)(تمرین) معادله $||x|-2|=\sqrt{x+k}$ سه جواب دارد. مقدار k کدام است؟



مثـال ۲۹) دامنه ی تابع $f(x)=\sqrt{2x+6}$ را به دست آورید. سپس به کمک نقطه یابی نمودار آن را رسم کرده و برد تابع را نیز معلوم کنید.

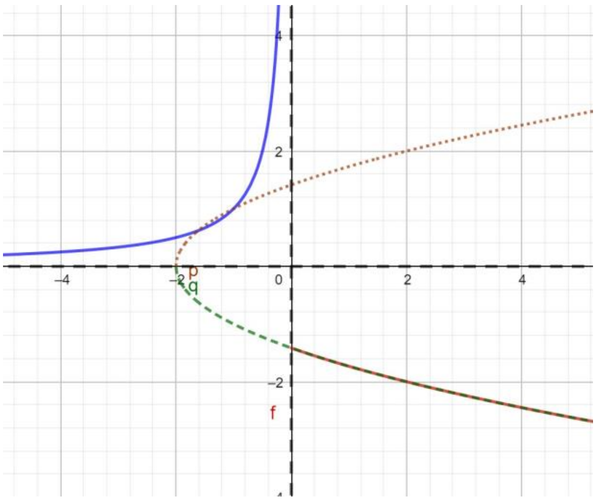


به نظر شما شکل $g(x)=\sqrt{2x+6}-2$ چطور رسم می شود و برد آن چقدر است ؟

مثـال ۳۰) برای تابع $\begin{cases} f:\left[0,\frac{1}{3}\right]\to[0,\infty) \\ f(x)=x^2 \end{cases}$ کدام نمایش قابل قبول است ؟

$\begin{cases} f:\mathbb{R}\to\left[0,\frac{1}{9}\right] \\ f(x)=x^2 \end{cases}$ ، $\begin{cases} f:\left[0,\frac{1}{3}\right]\to\mathbb{R} \\ f(x)=x^2 \end{cases}$ ، $\begin{cases} f:\left[0,\frac{1}{3}\right]\to\left[0,\frac{1}{10}\right] \\ f(x)=x^2 \end{cases}$

مثـال ۳۱) نمودار تابع $f(x)=\begin{cases} \frac{-1}{x} & ;x<0 \\ -\sqrt{x+2} & ;x\geq 0 \end{cases}$ را رسم کنید و دامنه و برد آن را مشخص کنید.



۳ تساوی دوتابع

دو تابع وقتی باهم برابرند که نمودارهای آن‌ها دقیقاً برهم منطبق باشند به عبارت دیگر هیچ نقطه‌ای یافت نشود که به یکی از نمودارها تعلق داشته باشد و به دیگری نه!

مثال ۳۲) آیا دو تابع $f(x)=x , g(x)=\frac{x^۲}{x}$ باهم برابرند؟

توابع $h(x)=\log x^۲ , k(x)=۲\log x$ چطور؟

تذکر ۹) برای مساوی بودن دوتابع باید:

ضابطه دوتابع باهم برابر باشند + دامنه دوتابع باهم برابر باشند

وهمچنین باید برد دوتابع باهم برابر باشند (که نتیجه دومورد اول می‌باشد)

تذکر ۱۰) در نمایش زوج مرتبی باشد ....

مثال ۳۳) کدام یک از توابع زیر با تابع $f(x)=۲x-۱$ برابرند؟

۱) $\sqrt{۴x^۲-۱}$ ۲) $\frac{۴x^۲-۱}{۲x+۱}$ ۳) $\frac{۴x^۳-۲x^۲+۲x-۱}{۲x^۲+۱}$ ۴) $\sqrt{۴x^۲-۴x+۱}$

$$۱)\sqrt{۴x^۲-۱}=|۲x|-۱ \neq (۲x-۱)$$

$$۲)\frac{۴x^۲-۱}{۲x+۱}=\frac{(۲x-۱)(۲x+۱)}{۲x+۱}=۲x-۱ \to : D=x\neq\frac{-۱}{۲} \neq D_f$$

$$۳)\frac{۴x^۳-۲x^۲+۲x-۱}{۲x^۲+۱}=\frac{(۴x^۳-۲x^۲)+(۲x-۱)}{۲x^۲+۱}=$$

$$\frac{۲x^۲(۲x-۱)+(۲x-۱)}{۲x^۲+۱}=\frac{(۲x-۱)(۲x^۲+۱)}{۲x^۲+۱}=۲x-۱$$

$$۴)\sqrt{۴x^۲-۴x+۱}=\sqrt{(۲x-۱)^۲}=|۲x-۱|\neq(۲x-۱)$$

مثال ۳۴) اگر توابع $f(x)=\frac{c}{x+۲}$ و $f(x)=\frac{bx+۲}{x^۲+ax+۴}$ با هم برابر باشند.

مقدار a+b+c چقدر است؟

$$D_g=R-\{-۲\}\to D_f=R-\{-۲\}\Rightarrow x^۲+ax+۴=\beta(x+۲)^۲ \quad \Delta=۰$$

$$\to \beta=۱\Rightarrow x^۲+ax+۴=(x+۲)^۲=x^۲+۴x+۴\to a=۴$$

$$\to \frac{bx+۲}{(x+۲)^۲}=\frac{c}{x+۲}\to c(x+۲)=(۱)(bx+۲)\to cx+۲c=bx+۲$$

$$c=۱ , b=c=۱\to a+b+c=۶$$

مثال ۳۵) (تمرین) آیا دو تابع $f(x)=|x-۲|\sqrt{x-۳} , g(x)=\sqrt{(x-۲)^۲(x-۳)}$ با هم برابرند؟

٤ تابع جزصحیح

٤-١ تعاریف

تابع پله‌ای: به هر تابعی که بتوان دامنه‌ی آن را به تعدادی بازه افراز نمود که تابع در هر دامنه ثابت باشد، تابع پله‌ای گوئیم. مثل تابع جزصحیح یا براکتی (مساله هزینه پارکینگ!)

تعریف جزصحیح:بزرگترین عدد صحیح کوچکتر یا مساوی x را جزصحیح x گوئیم. با نماد $[x]$

$$[x]=\max\{n\in\mathbb{Z}\ ,\ n\le x\}$$

به حاصل $x-[x]$ جز اعشاری عدد X گوییم.

مثال عددی :

$[-۱]=-۱$ $\quad [-۰/۷]=-۱$ $\quad [-۲/۳]=-۳$ $\quad [۱]=۱$ $\quad [۰/۷]=۰$ $\quad [۲/۳]=۲$

٤-٢ نکات واجب تابع جزصحیح

$1)[x]=k\to k\le x<k+1\quad k\in\mathbb{Z}$

$2)k\in\mathbb{Z}\to[x+k]=[x]+k$

$3)[x]\le x$

$4)\ 0\le x-[x]<1$

$5)[-x]+[x]=\begin{cases}0 & x\in\mathbb{Z}\\ -1 & x\notin\mathbb{Z}\end{cases}\quad ,\quad [-x]=\begin{cases}-[x] & x\in\mathbb{Z}\\ -[x]-1 & x\notin\mathbb{Z}\end{cases}$

یک نامساوی عجیب و نه چندان واجب

$x-1<[x]\le x<[x]+1$

تذکـــر (۱۱ اندکی تفکر و تحلیل در موارد بالا و همچنین برخی موارد بالا را اثبات کنید.

روند کلی اثبات:

$x=k+\alpha:k\in\mathbb{Z}\ ,\ 0\le\alpha<1\to[x]=[k+\alpha]=k+[\alpha]=k+۰\to$

$[x]=k\quad ,\ x-[x]=\alpha$

مثـــال ۳٦) رابطه شماره ۵ را اثبات کنید

$[-x]+[x]=\begin{cases}۰ & x\in z\\ -1 & x\notin z\end{cases}\qquad x=k+\alpha\to k\in z,۰\le\alpha<1,[x]=k$

$I)x\in z\to x=k,\alpha=۰\Rightarrow[-x]+[x]=[-k]+[k]=-k+k=۰$

$II)x\notin z\to x=k+\alpha,۰<\alpha<1\Rightarrow$

$[-x]+[x]=[-k-\alpha]+[k+\alpha]=-k+[-\alpha]+k+[\alpha]=[-\alpha]+[\alpha]=-1+۰=-1$

مثال ۳۷) رابطه $=n\ \left[\dfrac{x+y}{2}\right] \leftarrow [x]=[y]=n$ را اثبات کنید

$$[x]=n \to x=n+\alpha_1,\circ\le\alpha_1<1\ ,\ [y]=n \to y=n+\alpha_2,\circ\le\alpha_2<1$$

$$\Rightarrow \circ\le\alpha_1+\alpha_2<2 \Rightarrow \circ\le\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}<1$$

$$\left[\frac{x+y}{2}\right]=\left[\frac{2n+\alpha_1+\alpha_2}{2}\right]=[n+\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}]=n+[\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}]=n+\circ=n$$

مثال ۳۸) رابطه $[x]+[y]\le[x+y]\le[x]+[y]+۱$ را اثبات کنید

$$x=k_1+\alpha_1,k_1\in z\ ,\circ\le\alpha_1<1,\ [x]=k_1$$

$$y=k_2+\alpha_2,k_2\in z\ ,\circ\le\alpha_2<1,[y]=k_2$$

$$\Rightarrow[x+y]=[k_1+\alpha_1+k_2+\alpha_2]=k_1+k_2+[\alpha_1+\alpha_2]$$

$$\circ\le\alpha_1+\alpha_2<2\Rightarrow[\alpha_1+\alpha_2]=\circ\ or\ 1$$

$$\begin{cases}[\alpha_1+\alpha_2]=\circ & :[x+y]=k_1+k_2+\circ=[x]+[y]\\ [\alpha_1+\alpha_2]=1 & :[x+y]=k_1+k_2+1=[x]+[y]+1\end{cases}$$

مثال ۳۹) اگر $n\in\mathbb{N}$ باشد حاصل $\left[\sqrt[۳]{n^۳+۱}\right]$ را بدست آورید.

$$n^۳<n^۳+۱<n^۳+۱+۳n^۲+۳n=(n+۱)^۳$$

$$\sqrt[۳]{n^۳}<\sqrt[۳]{n^۳+۱}<\sqrt[۳]{(n+۱)^۳}\to n<\sqrt[۳]{n^۳+۱}<n+۱\to[\sqrt[۳]{n^۳+۱}]=n$$

مثال ٤٠) اگر بدانیم $(۱+\sqrt{۳})^۷+(۱-\sqrt{۳})^۷=۱۱۳۶$ ، حاصل $\left[(۱+\sqrt{۳})^۷\right]$ چقدر است ؟

مثال ٤١) اگر داشته باشیم $\left[x^۲+۱۱x\right]=\left[x^۲-۳x+۸\right]=۵$ ، حاصل $\left[(x+۲)^۲\right]$ را محاسبه کنید.

مثال ها و روابط بیشتر در متفرقه !

پیام بازرگانی ! : مضارب طبیعی عدد a که از عدد n کوچکتر باشد برابر با: $\left[\dfrac{n}{a}\right]$

۳-۴ دامنه و برد توابع جزصحیح

مثــال ۴۲) در هر مورد دامنه و یا برد خواسته شده را محاسبه کنید (مورد ۵ در متفرقه ریاضی)

1. $\dfrac{1}{\sqrt{x-[x]}}, D_f, R_f = ?$

$x-[x]>0 \Rightarrow 0 \le x-[x]<1 \to x-[x] \ne 0$

$x-[x]=0 \to x=[x] \Rightarrow x \in \mathbb{Z} \Rightarrow x \ne \mathbb{Z} \Rightarrow D_f = \mathbb{R}-\mathbb{Z}$

$0<x-[x]<1 \to 0<\sqrt{x-[x]}<1 \to \dfrac{1}{\sqrt{x-[x]}}>1 \Rightarrow R_f = (1,+\infty)$

---

2. $\dfrac{x+[x-[x]]}{x+[x]+[-x]} . D_f = ?$

$0 \le x-[x]<1 \to [x-[x]]=0$

$\Rightarrow (I)x \in \mathbb{Z} \to y = \dfrac{x+0}{x+0} = \dfrac{x}{x} = 1 \to \mathbb{Z}-\{0\}$

$(II)x \notin \mathbb{Z} \to y = \dfrac{x+0}{x-1} = \dfrac{x}{x-1} \to x \ne 1 \notin \mathbb{Z} \Rightarrow R-\mathbb{Z}$

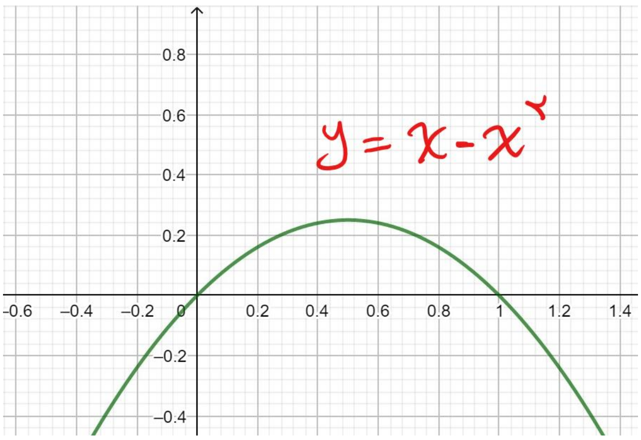
$(\mathbb{Z}-\{0\}) \cup (R-\mathbb{Z}) = R-\{0\}$

---

3. $\left[\dfrac{x^2+1}{x^2+2}\right] \quad D_f, R_f = ?$

---

4. $\sqrt{[x-x^2]} \quad D_f, R_f = ?$



٤-٤ معادلات شامل جزصحیح

مثـــال ٤٣) معادلات زیر را حل کنید

$$1)\ \left[x-1\right]+\left[x+2\right]+[x-1]=7$$

$$2)\ \left[x-\frac{1}{2}\right]+\left[x+\frac{1}{2}\right]=3$$

$$\left[x-\frac{1}{2}\right]+\left[x+\frac{1}{2}\right]=\left[x-\frac{1}{2}\right]+\left[x-\frac{1}{2}+1\right]=3\rightarrow 2\left[x-\frac{1}{2}\right]+1=3$$

$$\rightarrow\left[x-\frac{1}{2}\right]=1\rightarrow 1\le x-\frac{1}{2}<2\rightarrow ....$$

$$3)\ \left[2x\right]=2x$$

$$2x=k\in\mathbb{Z}\ \rightarrow ....,-2,-\frac{3}{2},-1,\frac{-1}{2},\circ,\frac{1}{2},1,\frac{3}{2},2,......$$

$$4)\ \left[-x^2+4x\right]=\left[-x^2-x\right]+\left[5x\right]+2$$

$$6)\ \left[x^2\right]-x-6=\circ$$

$$7)\ \left[\frac{x}{2}\right]=\frac{x}{3}$$

$$\frac{x}{3}=k\in\mathbb{Z}\rightarrow x=3k$$

$$\left[\frac{x}{2}\right]=k\rightarrow k\le\frac{x}{2}<k+1\rightarrow k\le\frac{3k}{2}<k+1\ \Rightarrow\ \text{-k}$$

$$\circ\le\frac{k}{2}<1\rightarrow\circ\le k<2\rightarrow k=\circ,1$$

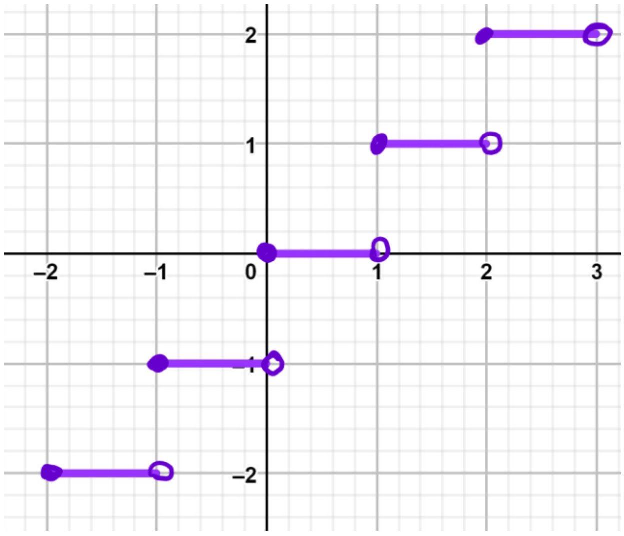
<u>**چند معادله مهم ویژه ریاضی در متفرقه**</u>

٤-٥ رسم نمودار های جزصحیح

٤-٥-١ رسم‌های معمولی

۱- نمودار تابع $y=[x]$

$$y=[x]=\begin{cases}-1\le x<0 : y=-1\\ 0\le x<1 : y=0\\ 1\le x<2 : y=1\\ 2\le x<3 : y=2\end{cases}$$



۲- نمودار تابع $y=x-[x]$

نکته جالب در این شکل : با انتقال یک واحد در راستای طول نمودار تابع تغییر نمیکند ، ببینید :

$$y=x-[x] \Rightarrow x\to x+1$$

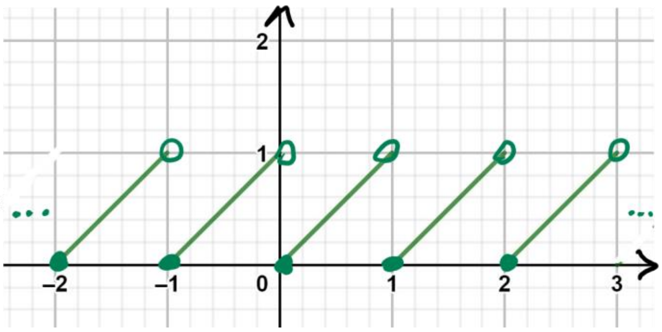
$$y=x+1-[x+1]=x+1-[x]-1=x-[x]$$

تابع متناوب !!

$$y=x-[x]$$

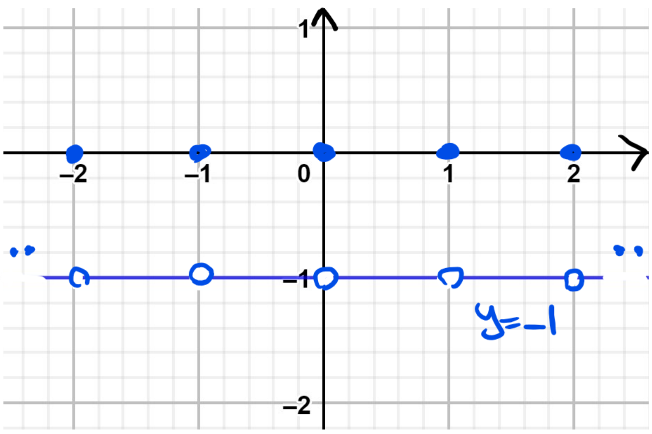
$$0\le x<1 \to y=x-[x]=x$$

$$1\le x<2 \to y=x-[x]=x-1$$

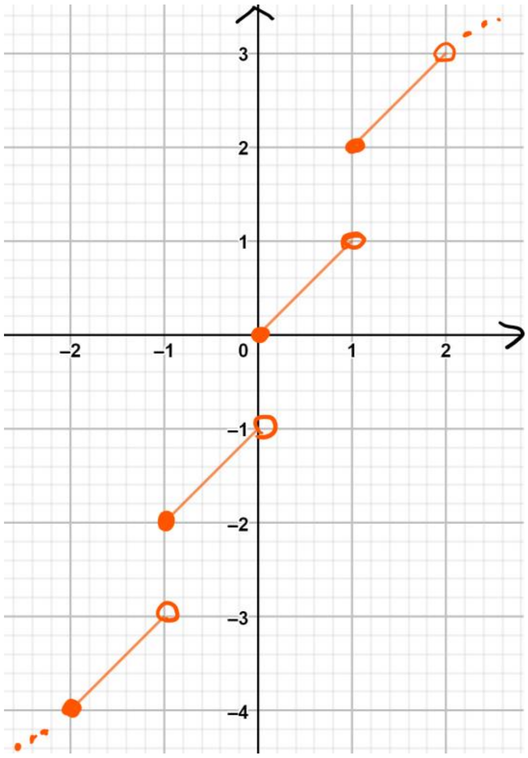


۳- نمودار تابع $y=[x]+[-x]$

$$[-x]+[x]=\begin{cases}0 & x\in Z\\ -1 & x\notin Z\end{cases}$$



٤- نمودار تابع $y = x + [x]$



$$y = x + [x] = \begin{cases} -1 \leq x < 0 : y = x - 1 \\ 0 \leq x < 1 : y = x \\ 1 \leq x < 2 : y = x + 1 \\ 2 \leq x < 3 : y = x + 2 \end{cases}$$

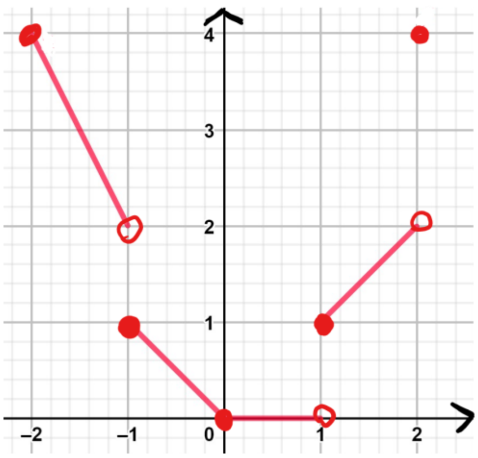
٤-٥-٢ رسم به کمک انتقال و مقیاس

چگونه میتوان نمودار $y = 3\left[\frac{x}{2}\right]$ را رسم کرد ؟

کافیست ابتدا نمودار $y = [x]$ را رسم کنیم و سپس اعداد محور طول را در .... و اعداد محور عرض را در ..... ضرب کنیم .

٤-٥-٣ رسم به کمک بازه بندی

مثـال ٤٤) نمودار $-2 \leq x \leq 2$, $y = x[x]$ را رسم کنید



$$\begin{array}{ll} -2 \leq x < -1 & : y = -2x \\ -1 \leq x < 0 & : y = -x \\ 0 \leq x < 1 & : y = 0 \\ 1 \leq x < 2 & : y = x \\ x = 2 & : y = 4 \end{array}$$

اگر x درون جزصحیح ضریب دار باشد :

کلا هر جا درون جزصحیح ، صحیح شود داستان داریم !

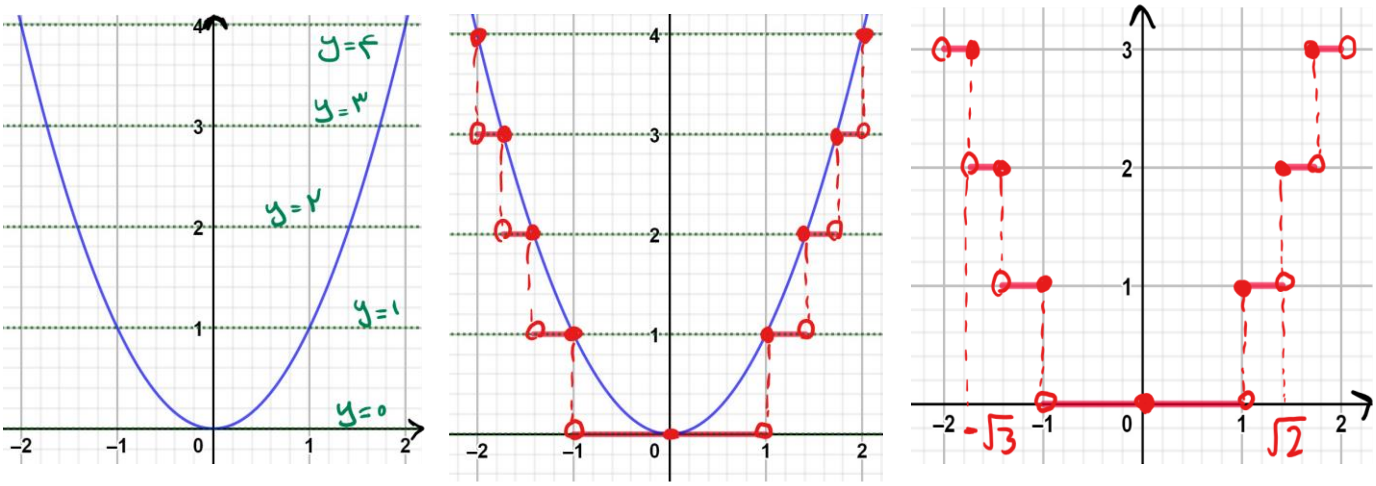
۴-۵-۴ رسم معروف $[f(x)]$

۱- رسم نمودار $f(x)$.

۲- خطوط $y=k$ را رسم کرده که $k \in \mathbb{Z}$ و محل تلاقی با نمودار تابع را مشخص کرده.

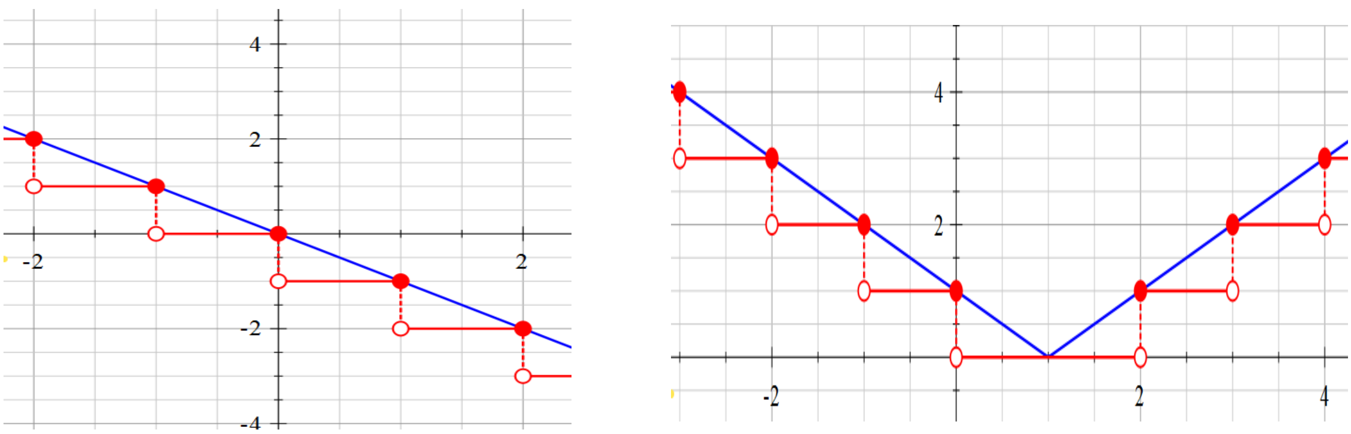
۳- هر قسمت نمودار که بین دو خط افقی $y=k+1$,$y=k$ قرار دارد، را روی خط پائینی، $y=k$ تصویر می‌کنیم.

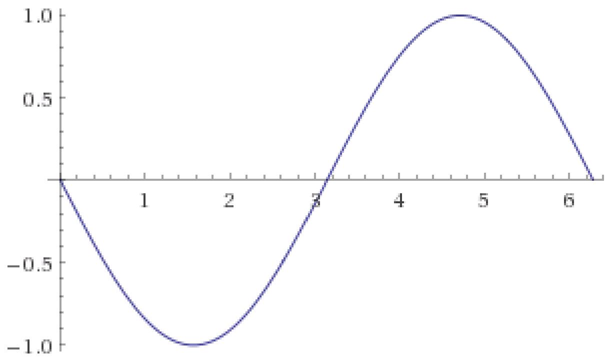
نقطه تلاقی منطبق بر خودش می‌باشد.مطابق شکل داریم: (رسم $[x^2],\ -2<x<2$)



مثال ۴۵) توابع زیر را رسم نمائید.

۱)$[-x]$ ۲)$[|x-1|]$ ۳)$[-\sin(x)]$ ۴)$[\cos(x)]+[\sin(x)]$





مورد ۴ تمرین

موارد بیشتر در متفرقه !

۵ توابع یک به یک

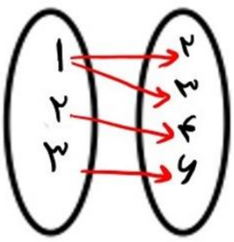
۵-۱ تعاریف

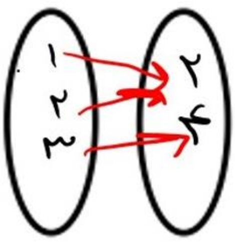
۱- تابع f یک به یک است هرگاه: $\forall x_۱,x_۲\in D_f:\ f(x_۱)=f(x_۲)\rightarrow x_۱=x_۲$

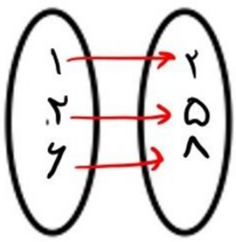
۲- از لحاظ زوج مرتبی تابعی یک به یک است که هیچ دو زوج مرتب متمایزی مولفه دوم یکسانی نداشته باشند.

$f_۱=\{(۱,۲),(۱,۳),(۲,۴),(۳,۶)\},f_۲=\{(۱,۲),(۲,۲),(۳,۴)\},f_۳=\{(۱,۲),(۲,۵),(۶,۸),(۱,۲)\}$

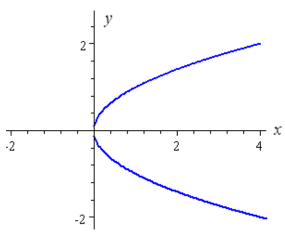
۳- از لحاظ نمودار ونی تابعی یک به یک است که هیچ عضوی از مجموعه دوم، دو پیکان متمایز نداشته باشد.

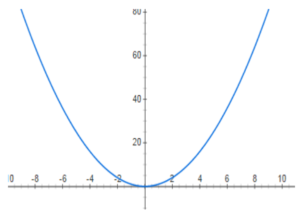


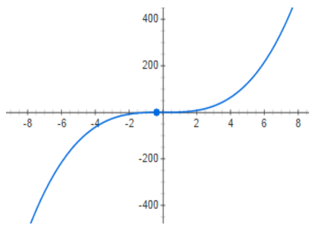




٤- از لحاظ نمودار مختصاتی تابعی یک به یک است که در صورت تلاقی با هر خط موازی محور افقی ، حداکثر فقط و فقط ۱ نقطه تلاقی داشته باشد.







تذکر ۱۲) تعریف شماره (۱) برگشت پذیر نیست ولی می توان گفت: اگر به ازای یک y ، ۲ یا چند x داشته باشیم، تابع مورد نظر یک به یک نیست. (مثال نقض)

۵-۲ روش های بررسی

بهترین روش : رسم تابع

مثال نقض : یک y خوب تا ما را به دو یا چند x برساند و تمام ! تابع یک به یک نیست !

بدترین روش! : اثبات تشریحی با تعریف $(y_1=y_2\Rightarrow x_1=x_2)$

تمامی خطوط به جز خط خاص افقی و عمودی ، تابع یک به یک هستند.

نکته اول مشتق طور : تابع درجه سوم به فرم $f(x)=ax^۳+bx^۲+cx+d$ وقتی یک به یک است که $b^۲-۳ac\leq ۰$ (باید مشتق آن ریشه نداشته باشد: $\Delta_{f'}\leq ۰$)

نکته دوم مشتق طور : تابع اکیدا صعودی یا اکیدا نزولی، یک به یک است !

بد نیست بدانیم ترکیب دو تابع یک به یک، یک به یک می باشد .

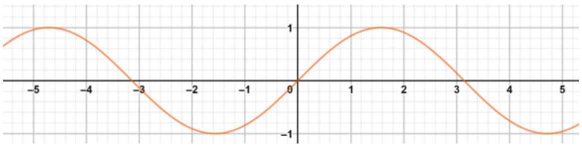
مقایسه کنید با بررسی تابع بودن !!!

مثـال ٤٦) یک به یک بودن توابع زیر را بررسی کنید

$$f_1 = y = x^2 + 7$$

$$y_1 = y_2 \Rightarrow x_1^2 + 7 = x_2^2 + 7 \to x_1^2 = x_2^2 \to x_1 = \pm x_2$$

$$f_2 = y = \sin(x)$$



$$f_3 = y = \sqrt[3]{\frac{x^5 - 1}{8}}$$

$$y_1 = y_2 \Rightarrow \sqrt[3]{\frac{x_1^5 - 1}{8}} = \sqrt[3]{\frac{x_2^5 - 1}{8}} \to \frac{x_1^5 - 1}{8} = \frac{x_2^5 - 1}{8} \to x_1^5 = x_2^5 \to x_1 = x_2$$

$$f_4 = y = x^3 + 3x^2 + 3x + 11$$

$$f_5 = y = x^3 + 2x^2 - x + 2$$

$$b^2 = 4 \ , 3ac = -3 \to b^2 - 3ac = 4 + 3 = 7 \leq \circ \to$$

اثبات تشریحی ، تمرین اختیاری (متفرقه)

مثـال ٤٧) وضعیت یک به یک بودن تابع $y = f(x) = x^2 - 2x$ را در دو حالت دامنه اعداد حقیقی و دامنه محدود شده $(-\infty, 1]$ بررسی کنید

دامنه اعداد حقیقی

$$y_1 = y_2 \Rightarrow x_1^2 - 2x_1 = x_2^2 - 2x_2 \quad \Rightarrow +1$$

$$\to x_1^2 - 2x_1 + 1 = x_2^2 - 2x_2 + 1 \to (x_1 - 1)^2 = (x_2 - 1)^2$$

$$\to (x_1 - 1) = \pm(x_2 - 1) \to \begin{cases} (x_1 - 1) = (x_2 - 1) \ \to \ x_1 = x_2 \\ (x_1 - 1) = -(x_2 - 1) \to x_1 + x_2 = 2 \end{cases}$$

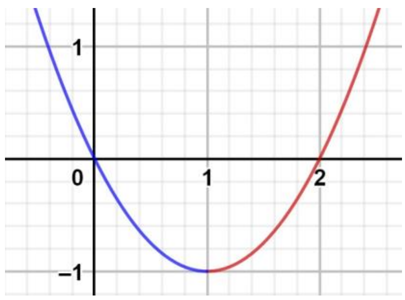
دامنه محدود شده

$$x \in (-\infty, 1] \to \quad x \leq 1 \to x - 1 \leq \circ \quad (*)$$

$$(x_1 - 1) = \pm(x_2 - 1) \to (*)$$

$$x_1 - 1 = x_2 - 1$$

$$\to x_1 = x_2$$

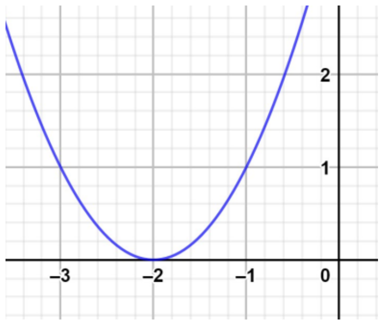


۳-۵ تحدید دامنه

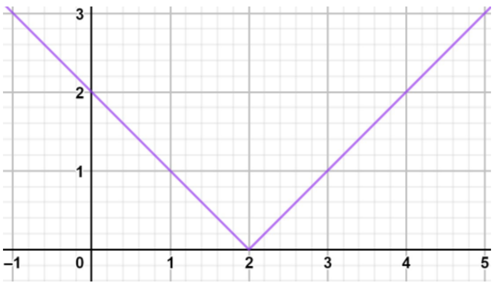
شاید تابعی در کل دامنه تعریف خود یک به یک نباشد ولی با کاهش فضای دامنه ی آن تبدیل به تابع یک به یک گردد(درجه ۲ + قدرمطلق خط!). روش حل بدینگونه است که بارسم تابع نواحی مشکل دار مشخص می گردند و آن نواحی باید حذف شوند.

مثــال ٤٨) توابع زیر با کاهش دامنه یک به یک سازید

$y=(x+2)^2$



$y=|x-2|$



راس تابع درجه دوم به فرم مربع کامل $y=a(x-b)^2+c$: ریشه پرانتز درجه ۲ :

راس تابع درجه دوم به فرم کلی $y=ax^2+bx+c$: راس سهمی :

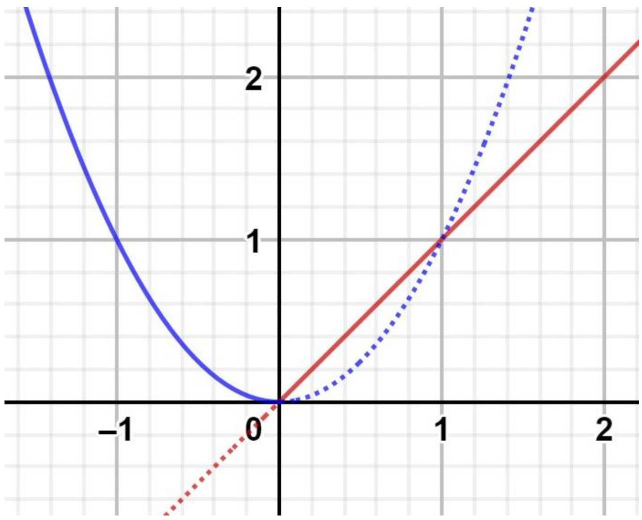
راس توابع قدرمطلق به فرم $y=c|ax+b|+d$: ریشه قدر مطلق :

بازه امن (safe) برای یک به یک بودن بازه ای است که راس شکل درون بازه نباشد!

٤-۵ بررسی توابع چندضابطه ای

اولا باید هر ضابطه در دامنه تعریف خود یک به یک باشد.
ثانیا باید برد ضابطه‌ها دو به دو اشتراک نداشته باشد.

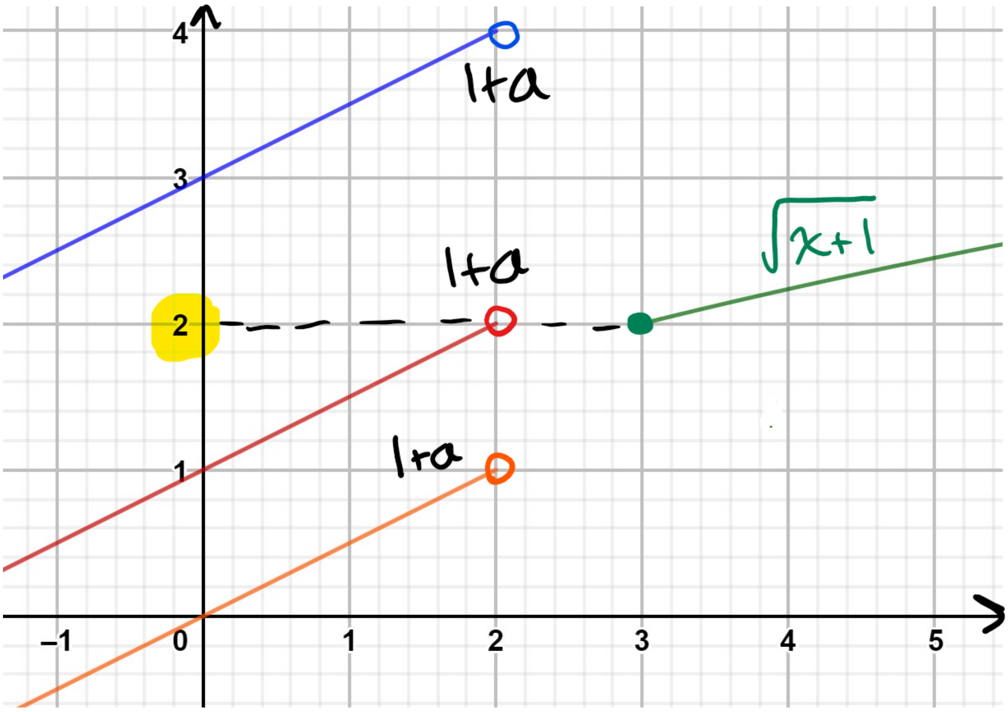
$$y=\begin{cases} x & x>0 \\ x^2 & x\le 0 \end{cases}$$



مثــال ٤٩) تابع با ضابطه $y=\begin{cases}\sqrt{x+1} & x\geq 3\\ \frac{1}{2}x+a & x<2\end{cases}$ یک به یک هست. حداکثر مقدار a چقدر است ؟

$$x\geq 3\to x+1\geq 4\to \sqrt{x+1}\geq 2\to y_1\geq 2:[2,+\infty)$$

$$x<2\to \frac{1}{2}x<1\to \frac{1}{2}x+a<1+a\to y_2<1+a:(-\infty,1+a)$$



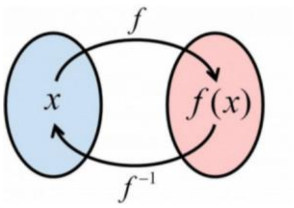
+ تست های بسیار مهم در بخش متفرقه ، حتما مطالعه کنید

۶ تابع معکوس

۱-۶ تعاریف

هرگاه تابع f یک به یک باشد تابع وارون f ، f^{-1} را بصورت زیر تعریف می کنیم:

$$f^{-1}=\{(y,x)|(x,y)\in f\} \quad , \quad f(x)=y \to x=f^{-1}(y)$$



یعنی در تابع وارون جای مولفه اول و دوم را عوض می کنیم.

(حالا شرط وارون پذیری را می فهمیم!)

دقت شود f^{-1} به معنای $\frac{1}{f}$ نمی باشد.

نمایش نمودار ونی:

مثال ۵۰) تابع معکوس $f(x)=\{(۱,۲),(۳,-۱),(۷,۵)\}$ را بدست آورید.

مثال ۵۱) معکوس تابع $f(x)=x^5+bx$ از نقطه $(6,1)$ میگذرد. مقدار b را بیابید .

$(6,1)\in f^{-1}\to$

تذکر ۱۳) شرط لازم و کافی برای وارون پذیری یک تابع ....

۲-۶ دامنه و برد تابع معکوس

$D_f=R_{f^{-1}} \quad , \quad R_f=D_{f^{-1}}$ پس کافیست دامنه و برد تابع اصلی را پیدا کنیم.

این موضوع به سادگی از تعریف و مفهوم تابع معکوس استنباط می شود .

برد تابع معکوس $y=f(x)=3x+\sqrt{x-1}$ کدام است ؟

۳-۶ محاسبه ضابطه تابع معکوس

۱- ابتدا x را برحسب y مرتب می کنیم.

۲- سپس x رابه y و y را به x تبدیل می کنیم.

البته بیش از هر چیز باید شرط وارون پذیری را چک می کنیم.

بحث چک دامنه + عدد گذاری !!

مثال ۵۲) ضابطه وارون تابع $f(x)=1-x^3$ را بدست آورید .

$$y=1-x^3\to x^3=1-y\to x=\sqrt[3]{1-y}\to f^{-1}(x)=\sqrt[3]{1-x}$$

مثال ۵۳) ضابطه وارون تابع $f(x)=2-3x$ را بدست آورید .

$$y=2-3x\to x=2-3y\to 3y=2-x\to f^{-1}(x)=\frac{2-x}{3}$$

مثــال ٥٤) وارون توابع زیر را بدست آورید

1. $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$

$ycx+yd=ax+b \to ycx-ax=b-yd \to (yc-a)x=b-yd$

$x=\dfrac{b-yd}{yc-a}=\dfrac{-dy+b}{cy-a} \to f^{-1}(x)=\dfrac{-dx+b}{cx-a} \qquad (f(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d})$

پس با شرط .... تابع هموگرافیک و وارون آن بر هم منطبق اند !

---

2. $f(x)=y=\sqrt{x+\sqrt{x}}$

$\wedge 2: y^2=x+\sqrt{x} \to y^2-x=\sqrt{x} \Rightarrow \wedge 2: y^4+x^2-2xy^2=x$

$x^2+x(-2y^2-1)+y^4=\circ \Rightarrow \Delta=(-2y^2-1)^2-4(1)(y^4)=4y^2+1$

$x=\dfrac{2y^2+1\pm\sqrt{4y^2+1}}{2} \ (*)$

$f: x=1 \to y=\sqrt{2} \to (*): \dfrac{5\pm 3}{2} \to (-) \to f^{-1}_{(x)}=\dfrac{2x^2+1-\sqrt{4x^2+1}}{2}$

پس اگر به ۲ راهی برخوردید، از عدد گذاری استفاده کنید !

---

3. $y=64x^3+48x^2+12x+2$

$y=(4x+1)^3+1 \qquad (a+b)^3=a^3+b^3+3a^2b+3ab^2$

$y-1=(4x+1)^3 \to \sqrt[3]{y-1}=4x+1 \to \dfrac{\sqrt[3]{y-1}-1}{4}=x \to$

٤-٦ معکوس توابع چند ضابطه ای

کافیست هر ضابطه را معکوس کرده و برد تابع اصلی را برای هر ضابطه به جای دامنه ضابطه معکوس در تابع معکوس به کار برد.

$$f(x)=\begin{cases} g(x) & , \ x\in D_g \\ h(x) & , \ x\in D_h \end{cases} \to f^{-1}(x)=\begin{cases} g^{-1}(x) & , \ x\in R_g \\ h^{-1}(x) & , \ x\in R_h \end{cases}$$

مثــال ٥٥) ضابطه وارون تابع $f(x)=2x+1-|x|$ را بیابید

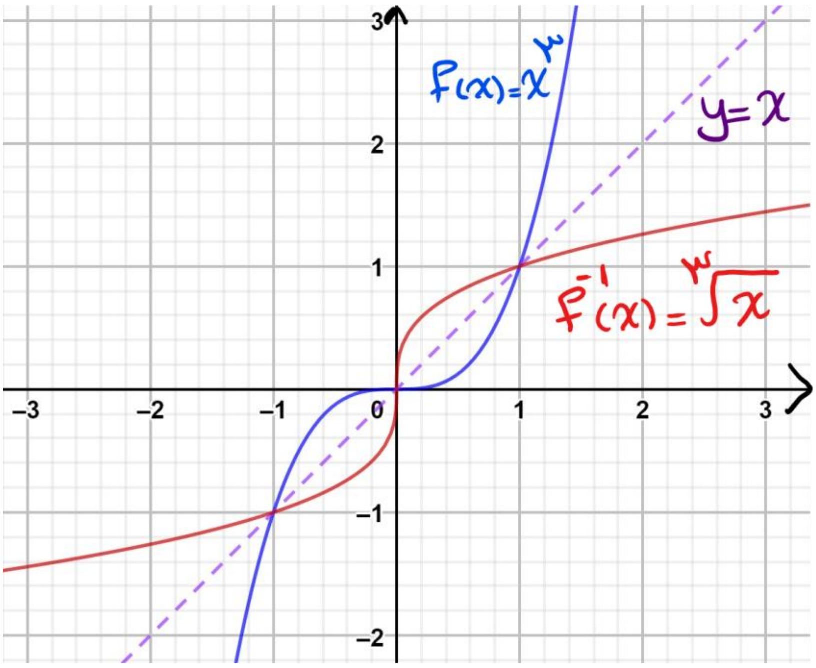
$$\begin{cases} x\geq\circ: y=2x+1-x \to y=x+1 \to x=y-1\geq\circ \to y\geq 1,\ f^{-1}(x)=x-1 \\ x<\circ: y=2x+1+x \to y=3x+1 \to x=\dfrac{y-1}{3}<\circ \to y<1,\ f^{-1}(x)=\dfrac{x-1}{3} \end{cases}$$

$$f^{-1}(x)=\begin{cases} x-1 & ; \ x\geq 1 \\ \dfrac{1}{3}x-\dfrac{1}{3} & ; \ x<1 \end{cases}$$

یک حرکت خفن در متفرقه !

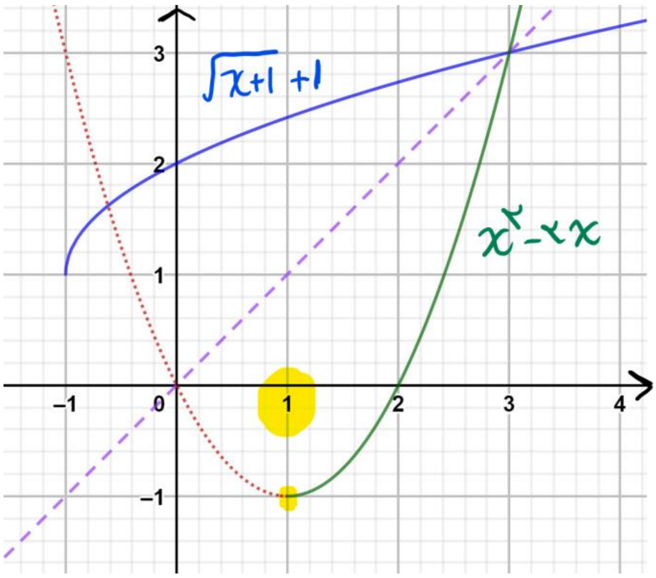
۵-۶ رسم نمودار تابع معکوس

کافیست نمودار را نسبت به محور .... قرینه سازیم چراکه با این کار جای مولفه طول و عرض عوض می شود دقیقا همان چیزی که در تابع وارون به آن نیازمندیم.



مثـال ٥٦) ضابطه وارون تابع $f(x)=\sqrt{x+1}+1$ را بدست آورید و تابع و وارون آن را رسم کنید .

$$y=\sqrt{x+1}+1 \rightarrow y-1=\sqrt{x+1} \Rightarrow \wedge 2:$$
$$y^2-2y+1=x+1 \rightarrow y^2-2y=x \rightarrow f^{-1}(x)=x^2-2x$$



یک جای کار مشکل داریم نه ؟؟

پس خیلی باید مراقب دامنه تابع معکوس باشیم!!

۶-۶ یک مطلب ترکیبی پر رو ! ترکیب و وارون!!

اول از همه با نماد $fog(x)$ آشنا شویم : $fog(x)=f(g(x))$
بحث را با یک مثال آغاز می کنیم.

مثال ۵۷) اگر $f(x)=\sqrt{2x-1}$ باشد ثابت کنید $f(x)$ وارون پذیر است و وارون آن را پیدا کنید. و اگر $g(x)=\frac{x^2+1}{2}, x>0$ باشد، توابع $fog(x)\ ,gof(x)$ را محاسبه کنید.

$$y=\sqrt{2x-1}\Rightarrow\Rightarrow y_1=y_2\to\sqrt{2x_1-1}=\sqrt{2x_2-1}\xrightarrow{\wedge 2}2x_1-1=2x_2-1\to x_1=x_2$$

$$y=\sqrt{2x-1}\xrightarrow{\wedge 2}y^2=2x-1\to y^2+1=2x\to\frac{y^2+1}{2}=x\to f^{-1}(x)=\frac{x^2+1}{2}\quad (x>0)$$

$$f(x)=\sqrt{2x-1}\quad g(x)=\frac{x^2+1}{2}\quad (x>0)\qquad g=f^{-1}$$

$$fog(x)=f(g(x))=f\left(\frac{x^2+1}{2}\right)=\sqrt{2\left(\frac{x^2+1}{2}\right)-1}=\sqrt{x^2}=|x|=x$$

$$gof(x)=g(f(x))=g\left(\sqrt{2x-1}\right)=\frac{\left(\sqrt{2x-1}\right)^2+1}{2}=\frac{2x-1+1}{2}=x$$

پس نتیجه میگیریم ترکیب تابع و معکوسش، همانی می باشد :

$$fof^{-1}_{(x)}=x\quad ,\quad f^{-1}of_{(x)}=x$$

اثبات :

$$y=f_{(x)}\to f^{-1}_{(y)}=x\to f^{-1}(f_{(x)})=f^{-1}(y)=x\to f^{-1}of_{(x)}=x$$

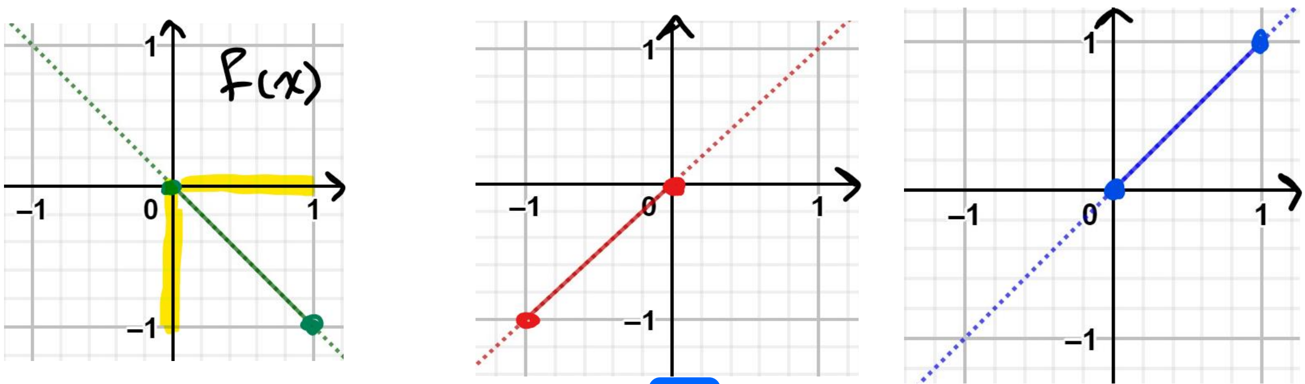
اما دامنه تعریف این دو تابع چطور بدست می آید ؟

$$h_1(x)=fof^{-1}_{(x)}=x\qquad :D_{h_{1(x)}}=D_{f^{-1}}=R_f$$

$$h_2(x)=f^{-1}of_{(x)}=x\qquad :D_{h_2}(x)=D_f$$

پس به طور کلی این دو تابع مساوی نیستند ؟؟!! (چه شرطی لازم است)

مثال ۵۸) برای تابع $f(x)=-x$ با دامنه $[0,1]$ ، دو ضابطه $h_1(x),h_2(x)$ را رسم کنید



چند نکته دیگر :

نکته اول : $(fog)^{-1}(x)=g^{-1}of^{-1}(x)$ (اثبات در متفرقه ویژه علاقه مندان)

نکته دوم : $(f^{-1})^{-1}=f$ وارون وارون یک تابع برابر خود تابع می باشد

نکته سوم: تابع و وارون آن هم جهت اند !

مثال ۵۹) اگر $f^{-1}(x)=x^3+x$ و $g(x)=2x+1$ باشند، وارون تابع fog را بیابید .

$(fog)^{-1}(x)=g^{-1}of^{-1}(x)$

$g(x)=2x+1\to g^{-1}(x)=\frac{1}{2}(x-1)\Rightarrow g^{-1}of^{-1}(x)=g^{-1}(x^3+x)=\frac{1}{2}(x^3+x-1)$

مثال ۶۰) اگر تابع $f(x)$ وارون پذیر باشد و $g(x)=3-f(2x)$ باشد، وارون $g(x)$ را بدست آورید.

$y=g(x)\Rightarrow x=g^{-1}(y)$

$y=3-f(2x)\Rightarrow f(2x)=3-y\Rightarrow 2x=f^{-1}(3-y)\Rightarrow x=\frac{1}{2}f^{-1}(3-y)$

$g^{-1}(y)=\frac{1}{2}f^{-1}(3-y)\Rightarrow g^{-1}(x)=\frac{1}{2}f^{-1}(3-x)$

مثال ۶۱) اگر $f(x)=x+2$ حاصل $f^{-1}(2)$ کدام است؟

مثال ۶۲) اگر $g(x)=f(x)+\sqrt{f(x)}$ و $f^{-1}(x)=\sqrt[3]{2x}$ حاصل $g^{-1}(6)$ کدام است؟

مثال ۶۳) اگر ضابطه تابع $f(x)$ بصورت $x\le -1$; $f(x)=x^2+2x$ باشد، مقدار b را از معادله $f^{-1}(4b+5)=b$ بیابید.

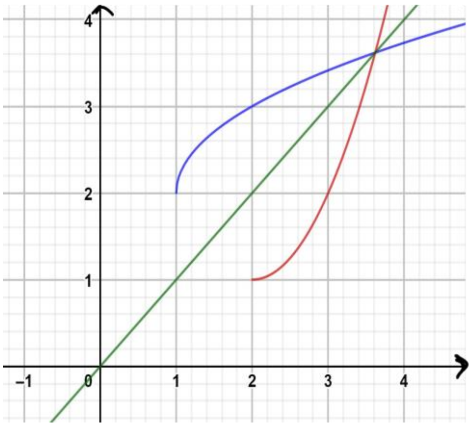
$f^{-1}(4b+5)=b\Rightarrow f(b)=4b+5\Rightarrow b^2+2b=4b+5$

$b^2-2b-5=0\Rightarrow b=\frac{2\pm\sqrt{24}}{2}=1\pm\sqrt{6}\Rightarrow b=1-\sqrt{6}$

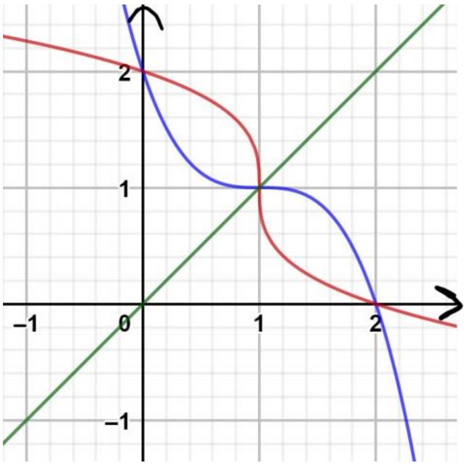
مثال های بیشتر در متفرقه + چند مساله تیپ حل شده

برای معکوس کردن یک تابع درجه ۲ از مربع کامل استفاده کنید !

۶-۷ تلاقی تابع و تابع وارون



۱- اگر نمودار $f(x)$ خط $y=x$ را درنقطه ای قطع کند، نمودار $f^{-1}(x)$ نیز خط $y=x$ را در همان نقطه قطع می کند وبالعکس.



۲- نمودار توابع $f(x)$ و $f^{-1}(x)$ ممکن است در نقاطی خارج از نیمساز اول و سوم نیز یکدیگر را قطع کنند .

۳- اگر $f(x)$ اکیدا صعودی و یا هموگرافیک باشد آنگاه نقطه تلاقی $f(x)$ و $f^{-1}(x)$ در صورت وجود بر روی خط $y=x$ است پس به جای حل معادله $f(x)=f^{-1}(x)$ می توان معادله $f(x)=x$ را حل کرد (اثبات متفرقه علاقه مندان)

اگر نزولی باشد بهتر است رسم کنیم (متفرقه) و یا معادله اصلی را حل کنیم

توابع معروف پایه ۱۱ که اکیدا صعودی هستند :

مثال ٦٤) اگر $y=f(x)=\sqrt{x+۱}$ باشد. ضابطه تابع معکوس را محاسبه نمایید و محل تلاقی آن را با تابع پیدا کنید.

$y=\sqrt{x+1}>\circ$

$\rightarrow y^2=x+1\rightarrow x=y^2-1\rightarrow f^{-1}_{(x)}=x^2-1,\ x\geq\circ$

$\rightarrow x^2-1=\sqrt{x+1}$

$\sqrt{x+1}=x>\circ\xrightarrow{\wedge 2} x+1=x^2\rightarrow x^2-x-1=\circ\rightarrow x=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}\rightarrow$

مثال ٦٥) اگر $f(x)=x^3+x-8$ فاصله تلاقی $f(x)$ و $f^{-1}(x)$ تا مبدا مختصات چقدر می باشد؟

۶-۸ تمارین بیشتر تابع وارون

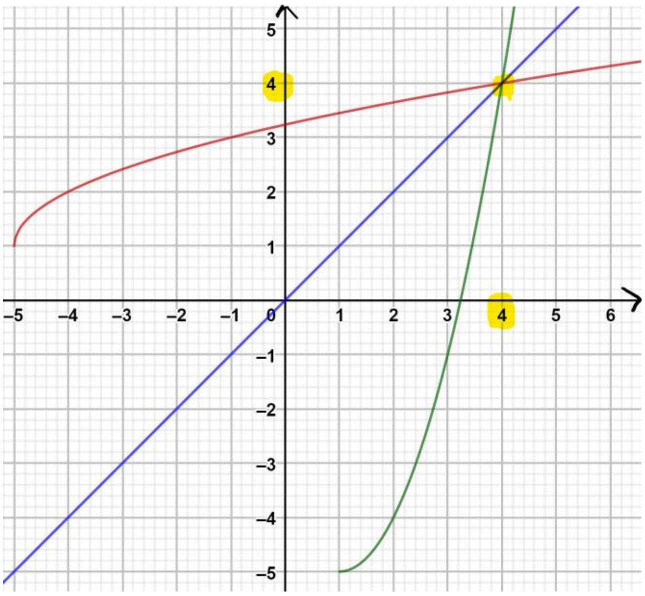
مثال ۶۶) وارون تابع $f(x)=x+[x]$ را بدست آورید

$$y=x+[x] \Rightarrow [\ \ ]$$

$$[y]=[x+[x]] \to [y]=[x]+[x] \to [y]=2[x] \to \frac{1}{2}[y]=[x]$$

$$y=x+[x]=x+\frac{1}{2}[y] \to x=y-\frac{1}{2}[y] \to f^{-1}(x)=x-\frac{1}{2}[x]$$

مثال ۶۷) تابع $f(x)=x^{۲}-۲x-۴$ را با تحدید دامنه ، معکوس کنید و سپس ضابطه معکوس آن را محاسبه کنید و دامنه و برد آن را حساب کنید ، سپس ریشه های تلاقی تابع و وارون آن را بدست آورید. (دامنه محدود شده پیشنهادی : $[۱,+\infty)$)



مثال ۶۸) اگر $g(2x)=1+f(x+2)$ و $g^{-1}(x)=1+\sqrt{2x+5}$ باشد، حاصل $f^{-1}(1)$ را بیابید.

$$f^{-1}(1)=b \to f(b)=1 \to x+2=b \to x=b-2$$

$$g(2b-4)=1+f(b)=2 \to g^{-1}(2)=2b-4 \to g^{-1}(2)=4=2b-4 \to b=4$$

مثال ۶۹) تابع f با ضابطه $f(x)=x-\frac{2}{x}$ در دامنه $(-\infty,۰)$ را در نظر بگیرید. نمودار تابع f^{-1} نیمساز ناحیه چهارم را با کدام طول قطع می کند؟

$$f^{-1}(x)=-x \to f(-x)=x \to -x+\frac{2}{x}=x \to \frac{2}{x}=2x \to x^2=1 \to x=1$$

مثال ۷۰) اگر $f(x)=f^{-1}(5)+x-3$ باشد حاصل $f(2\circ21)$ را بیابید؟

$$f^{-1}(5)=\alpha \to f(\alpha)=5$$

$$x=\alpha : f(\alpha)=\alpha+\alpha-3 \to 5=2\alpha-3 \to \alpha=4$$

$$\Rightarrow f(x)=4+x-3 \to f(x)=1+x$$

۷ اعمال روی توابع

در این قسمت می‌خواهیم یاد بگیریم چطور چند تابع را جمع و ضرب و تقسیم ....کنیم. این کار را منطقاً روی x هایی می‌توان انجام داد که عضو دامنه هر دو تابع باشند(؟) پس داریم:

$$D_{f\pm g}=D_f\cap D_g\ ,\ D_{f.g}=D_f\cap D_g\ ,\ D_{\frac{f}{g}}=\{x\ |x\in D_f\cap D_g\}-\{x\ |g(x)=0\}$$

و برای محاسبه ٤ عمل اساسی نیاز به هیچ کار خاصی نمی‌باشد و تنها کافیست ...

$$(f+g)_{(x)}=f_{(x)}+g_{(x)}$$

مثــال ۷۱) برای توابع داده شده دامنه‌ی مورد نظر را محاسبه کنید.

$$f(x)=\sqrt{x^2-1}\ ,\ g(x)=\frac{x+2}{x-4}\rightarrow\left(\frac{f}{g}\right)_{(x)}=?$$

مثــال ۷۲) برای تابع $f=\sqrt{x-1}$ و $g=\sqrt{2x}$ مقادیر $(f.g)_{(1)}$ و $(f.g)_{(-1)}$ را محاسبه کنید .

تذکــر ۱۴) برای محاسبه ۴ عمل اساسی توابع زوج مرتبی کافیست مولفه های اول یکسان را جدا نمایید وسپس عمل اساسی مورد نظر را روی مولفه دوم این زوج ها پیاده کنید.

مثــال ۷۳) برای توابع $f=\{(0,1),(1,6),(3,7)\},\ g=\{(4,7),(3,5)\}$ موارد زیر را محاسبه کنید

$$f.g=\{(3,35)\}$$

$2f=$ $\qquad\qquad$ $2f-3g=$

سوال اگر f+g و f-g را (بصورت زوج مرتب)داشته باشید. آیا می توانید تابع f را پیدا کنید؟

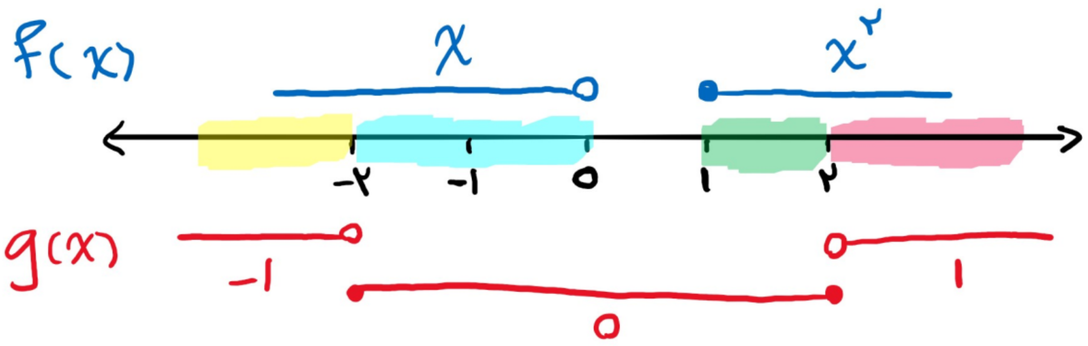
مثــال ۷٤) (تمرین) اگر $f=\{(5,3),(2,0),(3,-1),(7,1)\}$, $g=\{(2,4),(6,1),(3,7),(7,8)\}$ باشند، برد تابع $(\frac{g}{1+f})_{(x)}$ چند عضو دارد؟

۱) صفر $\qquad$ ۲) ۱ $\qquad$ ۳) ۲ $\qquad$ ۴) ۳

یک مثال خفن و اختیاری چند ضابطه ای

مثال ۷۵) برای دو تابع $g(x)=\begin{cases}1 & ; \quad x>2\\ 0 & ; \quad -2\le x\le 2\\ -1 & ; \quad x<-2\end{cases}$ و $f(x)=\begin{cases}x^2 & ; \quad x\ge 1\\ x & ; \quad x<0\end{cases}$

حاصل $(f.g)_{(x)}$ را بدست آورید.

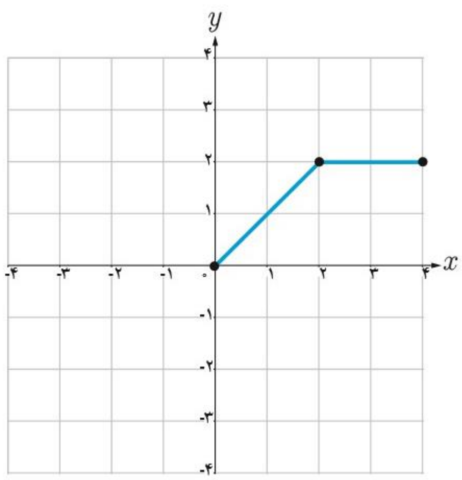


$$(f.g)_{(x)}=\begin{cases}x(-1) & ; \quad x<-2\\ x(0) & ; \quad -2\le x<0\\ x^2(0) & ; \quad 1\le x\le 2\\ x^2(1) & ; \quad x>2\end{cases}\Rightarrow$$

$$(f.g)_{(x)}=\begin{cases}-x & ; \quad x<-2\\ x^2 & ; \quad x>2\\ 0 & ; \quad -2\le x<0 \vee 1\le x\le 2\end{cases}$$

یک مورد ماستی از تمارین کتاب

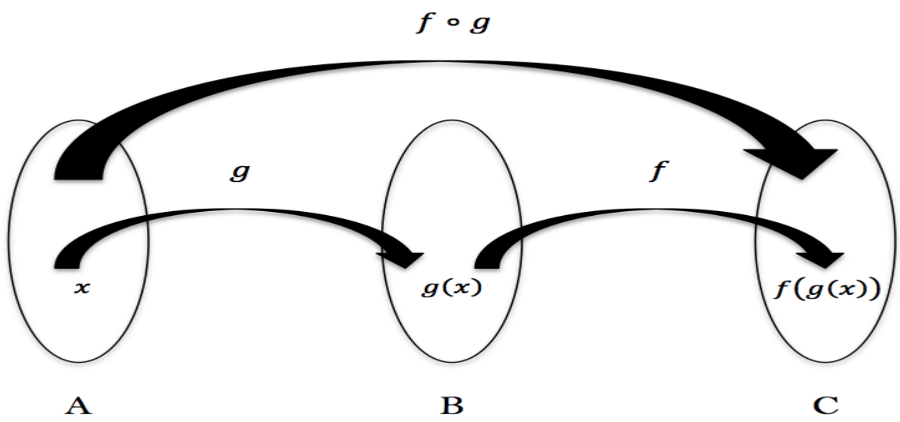
۳ در شکل روبه‌رو، نمودار تابع f داده شده است. نمودار تابع با ضابطهٔ $y=-2f(x)$ را رسم کنید.



۸ ترکیب توابع

۸-۱ تعریف

اگر دو تابع f و g طوری باشند که خروجی‌های g(x) به عنوان ورودی تابع f(x) باشند تابع ترکیبی fog(x) بوجود می‌آید که این تابع به مقدار x ، مقدار f(g(x)) را نسبت می‌دهد.



تعریف خودمانی : x رو بذار تو g و حاصل رو بذار تو f

مثال ۷۶) اگر داشته باشیم : $f(x)=x^2+2\ ,\ g(x)=\sqrt{x}$ ، آنگاه ضابطه تابع $(fog)_{(x)}$ را بدست آورید.

$$(fog)_{(x)}=f(g(x))=f(\sqrt{x})=\sqrt{x}^{\,2}+2=x+2$$

اما آیا جواب کل خط $y=x+2$ می باشد ، نباید به دامنه دقت کنیم ؟؟!!

۸-۲ دامنه ترکیب و شرط وجود ترکیب

$$D_{fog}=\left\{x\in D_g \,\middle|\, g_{(x)}\in D_f\right\}\quad ,\quad D_{gof}=\left\{x\in \quad \middle| \quad \in \quad \right\}$$

مثال ۷۷) اگر $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2-x}}$ و $g(x)=\dfrac{x^2}{x^2+1}$ باشد، مطلوب است :

$$D_{fog}=?\Rightarrow D_g=\mathbb{R}\ ,\ D_f: x^2-x>0\rightarrow x>1\ \vee\ x<0$$

$$g(x)\in D_f\ :\ \frac{x^2}{x^2+1}>1\ \vee\ \frac{x^2}{x^2+1}<0\ \Rightarrow\varnothing$$

$$D_{fog}=\left\{x\in D_g \,\middle|\, g_{(x)}\in D_f\right\}=\left\{\mathbb{R}\cap\varnothing\right\}=\varnothing$$

$$D_{gof}=?\Rightarrow f(x)\in D_g\ :\ \frac{1}{\sqrt{x^2-x}}\in\mathbb{R}\rightarrow ok:\mathbb{R}$$

$$D_{gof}=\left\{x\in D_f \,\middle|\, f_{(x)}\in D_g\right\}=\left\{D_f\cap\mathbb{R}\right\}=D_f$$

۲ نکته جالب از مثال قبلی

چه وقت تابع fog وجود دارد؟ $D_f \cap R_g \neq \varnothing$

چه زمانی دامنه تابع fog برابر دامنه تابع g می گردد؟

تذکر ۱۵) دامنه تابع fog زیر مجموعه‌ای از دامنه ..... و برد آن زیر مجموعه‌ای از برد ..... می‌باشد.

۸-۳ ترکیب زوج مرتبی

مثال ۷۸) توابع f, g داده شده اند، توابع gof , fog را بدست آورید

$$f=\{(2,4),(3,5),(1,3),(-1,0)\} \quad g=\{(1,2),(3,4),(2,3)\}$$

$$fog=\{(1,4),(2,5)\}$$

$$fog(1)=f(g(1))=f(2)=4 \to (1,4)$$

$$fog(3)=f(g(3))=f(4)=!!$$

$$fog(2)=f(g(2))=f(3)=5 \to (2,5)$$

$$gof$$

۸-۴ چند مساله مهم تابع مرکب

۸-۴-۱ تیپ اول

مثال ۷۹) اگر $f(x)=\dfrac{x+1}{x-1}$ و $g(x)=\dfrac{x-1}{x+1}$ باشند تابع $fog(x)$ را محاسبه کنید.

$$fog(x)=f(g(x))=\frac{g+1}{g-1}=\frac{g-1+2}{g-1}=1+\frac{2}{g-1}$$

$$g-1=\frac{x-1}{x+1}-1=\frac{-2}{x+1}$$

$$fog(x)=1+\frac{2}{g-1}=1+2\left(\frac{x+1}{-2}\right)=1-x-1=-x$$

مثال ۸۰) (تمرین) اگر $f(x)=2x+2a$ و $g(x)=x^2+bx+c$ باشند و بدانیم $fog(x)=2x^2+x+1$ ، حاصل $a+b+c$ کدامست؟

۸-٤-۲ تیپ دوم

مثال ۸۱) اگر $g(x)=3x-1$ و $f(g(x))=9x^2-1$ باشند تابع $f(x)$ را محاسبه کنید.

$$f(g(x))=f(3x-1)=9x^2-1 \Rightarrow 3x-1=t \to x=\frac{t+1}{3}$$

$$f(t)=9\frac{(t+1)^2}{9}-1=(t+1)^2-1 \Rightarrow f(x)=(x+1)^2-1=x^2+2x$$

تذکر ۱۹) همان طور که قبلاً هم در جزوه نشان دادیم به کمک تفکیک و یا تجزیه عبارت ها می توان با ساده سازی و شبیه سازی مسئله را ساده تر نمود مثل حل تکنیکی مثال قبل:

$$f(3x-1)=(3x-1)(3x+1)=(3x-1)(3x-1+2) \Rightarrow f(x)=x(x+2)$$

۸-٤-۳ تیپ سوم

مثال ۸۲) اگر $f(x)=\frac{2x-1}{3}$ و $f og(x)=\frac{3x}{x-1}$ باشند تابع $g(x)$ را محاسبه کنید.

$$f og(x)=f(g))=\frac{2g-1}{3}=\frac{3x}{x-1} \Rightarrow 2g-1=\frac{9x}{x-1}$$

$$2g=\frac{9x}{x-1}+1=\frac{10x-1}{x-1} \Rightarrow g(x)=\frac{10x-1}{2x-2}$$

۸-٤-٤ تیپ چهارم

مثال ۸۳) اگر $f(2x-1)=5x^2$ باشد ، مقدار $f(\frac{3}{2})$ را محاسبه کنید.

مثال ۸٤) اگر $g(x)=x-\frac{1}{x}$ و $f og(x)=3x^2+\frac{3}{x^2}$ باشند تابع $f(\sqrt{x})$ را محاسبه کنید.

$$f og(x)=f(x-\frac{1}{x})=3x^2+\frac{3}{x^2}=3\left[(x-\frac{1}{x})^2+2\right] \Rightarrow f(x)=3\left[(x)^2+2\right]$$

$$f(x)=3x^2+6 \to f(\sqrt{x})=3\sqrt{x}^2+6=3x+6$$

۸-۵ ترکیب چند ضابطه ای

مثال ۸۵) اگر $f(x)=3x-1$ و $g(x)=\begin{cases}2x+1 & x\geq 5\\ x-2 & x<5\end{cases}$ باشند تابع $gof(x)$ را محاسبه کنید.

$$gof(x)=g(f(x))=g(3x-1)=\begin{cases}2(3x-1)+1 & (3x-1)\geq 5\\ (3x-1)-2 & (3x-1)<5\end{cases}$$

$$gof(x)=\begin{cases}6x-1 & x\geq 2\\ 3x-3 & x<2\end{cases}$$

یک مورد دو ضابطه ای در دو ضابطه ای در متفرقه !

۸-۶ چند مثال ترکیبی

مثال ۸۶) توابع f و g بصورت زیر تعریف شده اند. موارد زیر را بدست آورید

$$g=\{(-1,4),(2,7),(5,2),(3,3),(6,1)\},f=\{(3,2),(5,1),(4,3),(2,-1),(1,5),(0,3)\}$$

$$gog^{-1}=\{(4,4),(7,7),(2,2),(3,3),(1,1)\}$$

$$fog^{-1}+f$$

مثال ۸۷) f و g توابعی چند جمله ای از درجه ۳ و ۵ هستند. درجه توابع زیر را به دست آورید.

$$f+g=\max\{3,5\}=5\ ,\ f^4=3\times 4=12\ ,\ f\times g=3+5=8\ ,\ fog=3\times 5=15$$

مثال ۸۸) هرگاه f تابعی یک به یک باشد و $f(x+2f(x))=f(5x+2)$، در این صورت نمودار تابع $y=fof(x)$ محور y ها را با چه عرضی قطع می کند؟

با توجه به این که تابع f یک به یک می باشد، داریم:

$$f(A)=f(B)\Rightarrow A=B$$

$$x+2f(x)=5x+2\Rightarrow f(x)=2x+1$$

$$\Rightarrow fof(x)=f(f(x))=2f(x)+1=2(2x+1)+1=4x+3\Rightarrow fof(\circ)=3$$

سوال اگر gof یک به یک باشد آیا تابع f یک به یک است؟

فرض کنیم تابع fیک به یک نباشد (برهان خلف!)

$$A\neq B\Rightarrow f(A)=f(B)\Rightarrow g(f(A))=g(f(B))$$

$$A\neq B\Rightarrow gof(A)=gof(B)\ !!!!$$

۸-۷ محاسبه برد تابع مرکب

باید ضابطه تابع را تشکیل داد و با توجه به دامنه آن در مورد برد تابع حاصل قضاوت نمود.

مثال ۸۹) اگر $g(x)=\sqrt{x}$ و $f(x)=x^2+1$ باشند ، برد تابع $fog(x)$ را محاسبه کنید.

$$y=fog(x)=x+1\,;\,x\geq 0$$

$$x\geq 0\Rightarrow x+1\geq 1\Rightarrow y\geq 1 : R_{fog}=[1,+\infty)$$

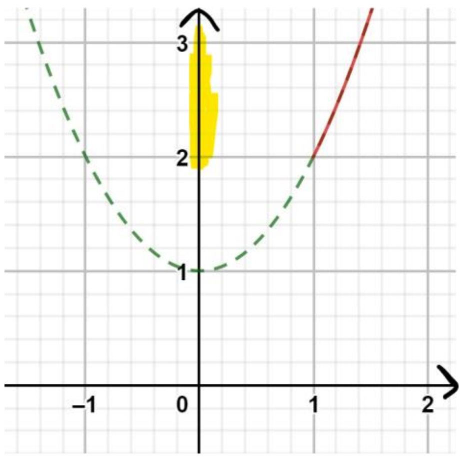
اما روش بالا در بعضی از موارد بسیار سخت می شود پس :

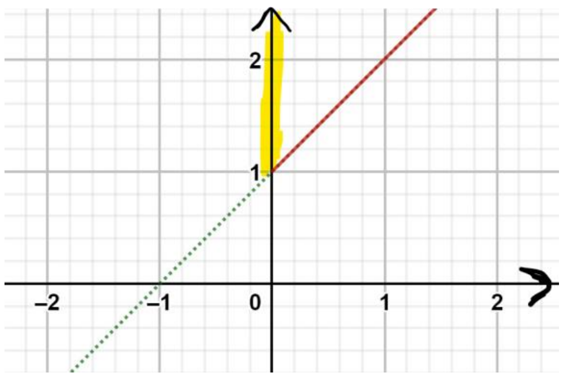
روش دوم : یک ایده جالب : برد تابع g را بدست آورید و به عنوان دامنه برای تابع f در نظر بگیرید سپس برد تابع f را با این دامنه محدود شده محاسبه کنید

مثال ۹۰) اگر $g(x)=\sqrt{x}+1$ و $f(x)=x^2+1$ باشند ، برد تابع $fog(x)$ را محاسبه کنید.

$$y=g(x)=\sqrt{x}+1\Rightarrow\sqrt{x}\geq 0\Rightarrow\sqrt{x}+1\geq 1\Rightarrow y_g\geq 1$$

$$y=f(x)=x^2+1;\;\; x\geq 1\Rightarrow x^2\geq 1\Rightarrow x^2+1\geq 2\Rightarrow y_f\geq 2 : R_{fog}=[2,+\infty)$$





تذکر ۱۷) همواره در مسائلی که به هر ترتیبی تابع مرکب ، مطرح شده است بسیار بهتر است که ابتدا دامنه تابع مرکب را حساب کنیم چرا که میتواند سرنوشت ساز باشد!

چند مساله حل شده مهم + تست های تابع مرکب در متفرقه + یک تمرین جالب

مثال ۹۱) اگر توابع f و g به عنوان ماشین بصورت $2x-1\rightarrow\boxed{f}\rightarrow\boxed{g}\rightarrow x^3-3x$ و $g(x)=2x+1$ باشند، مقدار $f(5)$ را پیدا کنید

$$g(f(2x-1))=x^3-3x$$

$$g(x)=2x+1\Rightarrow g(f(2x-1))=2f(2x-1)+1=x^3-3x$$

$$2x-1=5\Rightarrow x=3\Rightarrow 2f(5)+1=18\Rightarrow f(5)=8.5$$

۹ متفرقه

۱۰ کاردرخانه

۱۱ یادداشت

امیر وفائی

مدرس ریاضیات دوره دوم متوسطه از پایه تا کنکور – متخصص هر دو رشته ریاضی و تجربی

طراح سوالات همه شاخه های ریاضی کانون فرهنگی آموزش (قلمچی)

رتبه ٣٦ کنکور سراسری

نفر اول دوره کارشناسی و کارشناسی ارشد مهندسی عمران دانشگاه صنعتی شریف

پذیرفته شده دوره دکتری مستقیم مهندسی عمران دانشگاه صنعتی شریف

رکوردار معدل دانشکده عمران دانشگاه صنعتی شریف از بدو تاسیس تا کنون

کسب عنوان دانشجوی نمونه دانشکده عمران و دانشگاه صنعتی شریف در سال ١٣٩٤ و ١٣٩٥

سابقه بیش از ١٠ ترم استادیاری (دستیار استاد) در دروس مختلف تخصصی و عمومی دانشگاه صنعتی شریف

گذراندن دوره فرعی رشته ریاضی دانشگاه صنعتی شریف

استاد حل تمرین ریاضی دانشگاه صنعتی شریف

حضور در مدرسه شهیدبشهتی ١ (تیزهوشان) از سال ٩٢ به عنوان مشاور و مدرس ریاضی

تالیف کتاب تا کنکور با همکاری مدرسه تیزهوشان

مبتکر برنامه های جمعبندی ویژه ١٠٠-١٠٠ در همه پایه ها با مشابهت ١٠٠ درصدی در کنکور سراسری

آموزش مفهومی و متفاوت درس ریاضی منطبق بر برنامه دقیق تدریس و آزمون و برنامه تست

مدرس رتبه های برتر (تک رقمی و دو رقمی)

AMIRVAFAEI6

www.Donat.Academy