وفا

آموزش تخصصی ریاضیات

# امیر وفائی

## جزوات آموزش ریاضی

# حد و پیوستگی

- فصل ۶ ریاضی ۲ رشته تجربی ۱۱
- فصل ۵ حسابان ۱ رشته ریاضی ۱۱


@vafaei_math

AmirVafaei6

0936 879 1709

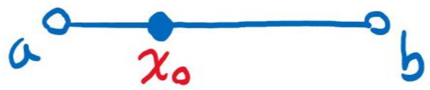
www.Donat.academy

**فهرست مطالب**

# ۱ بخش اول، حد

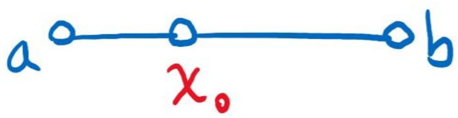
## ۱-۱مفاهیم اولیه

### ۱-۱-۱ تعریف همسایگی




**همسایگی (نامحذوف) :** اگر $x_\circ$ یک عدد حقیقی باشد، هر بازه باز شامل $x_\circ$ را یک همسایگی $x_\circ$ می نامیم. بنابراین اگر $x_\circ \in (a,b)$ آن گاه بازه $(a,b)$ یک همسایگی $x_\circ$ است.

**مثال :**




**همسایگی محذوف :** اگر نقطه $x_\circ$ را از این بازه حذف کنیم، مجموعه $(a,b)-\{x_\circ\}$ را همسایگی محذوف $x_\circ$ می نامیم.

**مثال :** $(2,8)-\{6\}=(2,6)\cup(6,8)$


**همسایگی راست :** اگر $r>0$ در این صورت بازه $(x_\circ,x_\circ+r)$ را یک همسایگی راست $x_\circ$ می نامیم.

**مثال :**


**همسایگی چپ :** اگر $r>0$ در این صورت بازه $(x_\circ-r,x_\circ)$ را یک همسایگی چپ $x_\circ$ می نامیم.

**مثال :**

**مثال ۱)** اگر بازه $(x-1,x+3)$ یک همسایگی ۲ باشد، مجموعه مقادیر x را به دست آورید.

## تعریف علمی

همسایگی متقارن $a$ : بازه $(a-\varepsilon,a+\varepsilon)$ رایک همسایگی متقارن $a$ به شعاع $\varepsilon$ گویند.

$$N(a,\varepsilon):x\in(a-\varepsilon,a+\varepsilon)\ :-\varepsilon<x-a<\varepsilon\ \ :0\le|x-a|<\varepsilon$$

دقت گردد که شعاع همسایگی یک عدد بسیار کوچک و مثبت می‌باشد.

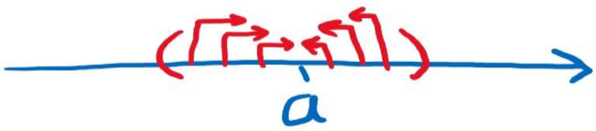
**تذکر ۱)** همسایگی یک عدد، دوست و رفقای بسیار نزدیک به آن عدد اند!

**مثال ۲)** بازه $(-4,2)$ را به شکل یک همسایگی نشان دهید.

$$x\in(x_\circ,y_\circ)\ \Leftrightarrow x\in N\left(\frac{x_\circ+y_\circ}{2},\frac{y_\circ-x_\circ}{2}\right)$$

### ۲-۱-۱ مفاهیم میل کردن

۱- $x \to a$: x با مقادیر بیشتر و کمتر از $a$ به سمت این عدد نزدیک می‌گردد. (فاصله‌اش کم می گردد یا به عبارتی در یک همسایگی این عدد قرار می گیرد.)




همسایگی $a$ : $a$ ی حدی !! – رفقای صمیمی $a$

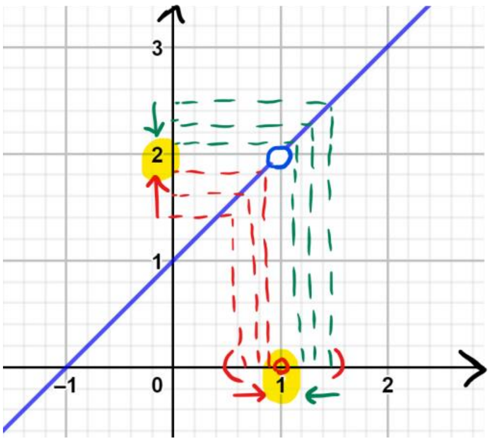
۲- $x \to a^+$: x با مقادیر بیشتر از $a$ به سمت این عدد نزدیک می‌گردد. (فاصله‌اش کم می گردد یا به عبارتی در یک همسایگی راست این عدد قرار می گیرد.) ( $a$ بیشتر)

۳- $x \to a^-$: x با مقادیر کمتر از $a$ به سمت این عدد نزدیک می‌گردد. (فاصله‌اش کم می گردد یا به عبارتی در یک همسایگی چپ این عدد قرار می گیرد.)( $a$ کمتر)

۴- $x \to +\infty$: x به مثبت بی‌نهایت که یک مفهوم بسیار بزرگ می‌باشد، نزدیک میگردد. به عبارت دیگر x از هر عدد مثبتی نیز بزرگ‌تر است.

۵- $x \to -\infty$: x به منفی بی‌نهایت که یک مفهوم بسیار کوچک می‌باشد، نزدیک میگردد. به عبارت دیگر x از هر عدد منفی ای نیز کوچک‌تر است.

### ۳-۱-۱ تعریف شهودی حد تابع




تابع $y = f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$ را در نظر بگیرید.

آیا تابع در همسایگی ۱ تعریف شده‌است؟

$\lim\limits_{x \to 1} f(x)$ چیست؟ حد تابع (مقادیر تابع) وقتی x به سمت 1 نزدیک می گردد و نه خود ۱.

| X | ۰/۹ | ۰/۹۵ | ۰/۹۹۹ | ۱ | ۱/۰۰۱ | ۱/۰۵ | ۱/۱ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Y | ۱/۹ | ۱/۹۵ | ۱/۹۹۹ | ؟ | ۲/۰۰۱ | ۲/۰۵ | ۲/۱ |

پس حد تابع برابر است با:

$$\lim_{x \to 1} f(x) = \lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{(x+1)(x-1)}{(x-1)} = \lim_{x \to 1} (x+1) = 1 + 1 = 2$$

**تذکـــر ۲)** حاصل حد خود مقداری حدی است! یعنی حاصل برابر دقیقا عدد۲ نیست بلکه برابر ۲ حدی می باشد، یعنی یک همسایگی ۲ یا دوست و رفقای ۲. اما طبق متن صریح کتاب درسی حاصل حد پس از محاسبه بصورت یک عدد حقیقی و مشخص بیان می شود و دقیقا برابر با عدد محاسبه شده فرض می گردد!!!!

**تذکـــر ۳)** چندمثال حدی! $0^+ = 0.01 \,,\ 0^- = -0.01 \,,\ 1^+ = 1.01 \,,\ 1^- = 0.99 \,,\ (-1)^- = -1.01$

حد تابع در نقطه x=2 چقدر است ؟

پس استراتژی اصلی : ول بده بره : V دبل B : VBB

وقتی می گوییم $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$ دقیقا یعنی :

## ۱-۱-۴ تعریف حد $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$

**تعریف حد یک تابع**

فرض کنیم تابع $f$ در یک همسایگی عدد $a$ (به جز احتمالاً در خود $a$) تعریف شده باشد. می‌گوییم «حد تابع $f$ وقتی $x$ به $a$ نزدیک می‌شود برابر عدد حقیقی $L$ است»، هرگاه مقادیر تابع $f$ را به هر اندازهٔ دلخواه بتوان به $L$ نزدیک کرد، به‌شرط آنکه متغیر $x$ (با مقادیر مخالف $a$ از دوطرف) به قدر کافی به $a$، نزدیک شود.

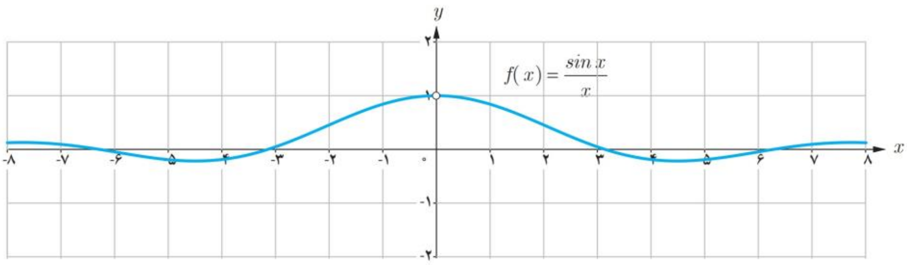
در این صورت می‌نویسیم : $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$

عدد $L$ را حد تابع $f$ در $a$ می‌نامیم.

**دو مساله مهم از کتاب درسی**

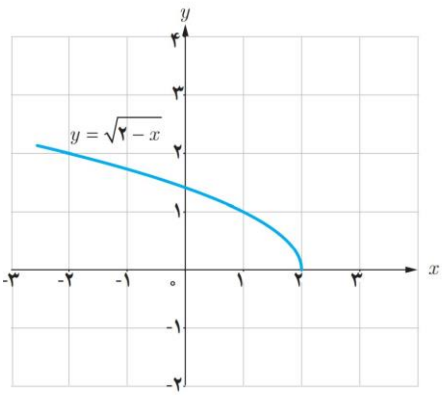
۵ تابع $f$ با ضابطه $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ در نقطه صفر تعریف نشده است. در جدول روبه‌رو برخی مقادیر این تابع در اطراف صفر داده شده است. با توجه به جدول و نمودار تابع $f$، مقدار $\lim\limits_{x \to ۰} \dfrac{\sin x}{x}$ را به دست آورید. (محور $x$ها برحسب رادیان است).

| $x$ | $\dfrac{\sin x}{x}$ |
|---|---|
| ±۱ | ۰/۸۴۱۴۷۰۹۸ |
| ±۰/۵ | ۰/۹۵۸۸۵۱۰۸ |
| ±۰/۴ | ۰/۹۷۳۵۴۵۸۶ |
| ±۰/۳ | ۰/۹۸۵۰۶۷۳۶ |
| ±۰/۲ | ۰/۹۹۳۳۴۶۶۵ |
| ±۰/۱ | ۰/۹۹۸۳۳۴۱۷ |
| ±۰/۰۵ | ۰/۹۹۹۵۸۳۳۹ |
| ±۰/۰۱ | ۰/۹۹۹۹۸۳۳۳ |
| ±۰/۰۰۵ | ۰/۹۹۹۹۹۵۸۳ |
| ±۰/۰۰۱ | ۰/۹۹۹۹۹۹۸۳ |




**مثال :** آیا تابع $f(x) = \sqrt{۲ - x}$ در نقطه $x = ۲$ حد دارد؟ چرا؟

**حل :** می‌دانیم دامنه تابع به صورت $D_f = (-\infty, ۲]$ می‌باشد.
چون تابع $f$ در هیچ همسایگی محذوف ۲، تعریف نشده است (مقادیر بیشتر از ۲ در دامنه تابع نیست) بنابراین، تابع $f$ در نقطه $x = ۲$ حد ندارد.




## ۱-۱-۵ تعریف حد چپ و راست

هرگاه x با مقادیر بیشتر از a (از راست) به a نزدیک شود حاصل حد، حد راست خواهد بود.
هرگاه x با مقادیر کمتر از a (از چپ) به a نزدیک شود حاصل حد، حد چپ خواهد بود

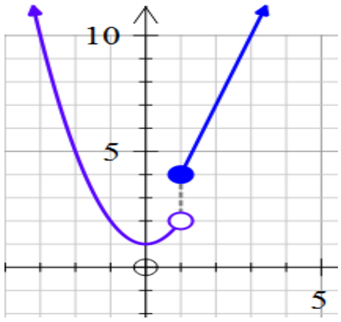
**تعریف حد راست :**

اگر تابع $f$ در یک همسایگی راست نقطه‌ای مانند $a$ تعریف شده باشد می‌گوییم حد راست تابع $f$ در نقطه $x = a$ برابر عدد $L_۱$ است هرگاه مقادیر تابع $f$ را به هر اندازهٔ دلخواه بتوان به $L_۱$ نزدیک کرد، به‌شرط آنکه متغیر $x$ (از سمت راست) به قدر کافی به $a$، نزدیک شود.

در این صورت می‌نویسیم : $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = L_۱$

تعریف حد چپ مشابه حد راست می باشد.

**مثال ۳)** با رسم تابع $f(x)=\begin{cases}3x+1\,,\ x\ge 1\\ x^2+1\,,\ x<1\end{cases}$ حدود زیر را محاسبه نمائید.




$$\lim_{x\to 1^+} f(x)$$

$$\lim_{x\to 1^-} f(x)$$

$$\lim_{x\to 1} f(x)$$

### ۱-۱-۶ قضیه بسیار مهم حد تابع

حد تابع در نقطه x=a وجود دارد اگر و تنها اگر حد چپ و راست تابع در x=a موجود (یک عدد حقیقی مشخص نه بینهایت !) و با هم برابر باشند . اگر حد چپ و حد راست در نقطه x=a ، دو مقدار متمایز باشند آن گاه تابع fدر نقطه x=a حد ندارد.

پس اگر در نقطه مورد بررسی فقط یک همسایگی وجود داشته باشد و یا هیچ همسایگی نداشته باشد، تابع در آن نقطه حد ندارد چون دوست و رفقای آن نقطه در دامنه تابع وجود ندارند.

**تذکر ۴)** **در قضیه قبلی نیازی به وجود خود نقطه حدگیری در دامنه نیست!**

**تذکر ۵)** **پس اولین اقدام در محاسبه حد چک دامنه در نقطه حدگیری می باشدو سپس در صورت وجود دو همسایگی،برابری دو حد چپ وراست و برابر شدن با یک عدد حقیقی مشخص مهم است (یکتا باشد و نامتناهی نباشد!)**

## ۱-۲ محاسبه حدود مقدماتی

### ۱-۲-۱ روند کلی محاسبه حد

ابتدا باید دامنه را کنترل کرد و استراتژی اساسی **VBB**

حالا چه زمان، نیاز به محاسبه جداگانه ی حد چپ و راست داریم ؟

هر گاه نقطه حد گیری یکی از موارد زیر باشد:

۱- صحیح کننده عبارت درون جزصحیح، $[2x+1]$:

۲- ریشه ساده درون قدرمطلق، $|x-1|$ $\qquad |(x-1)^2|$

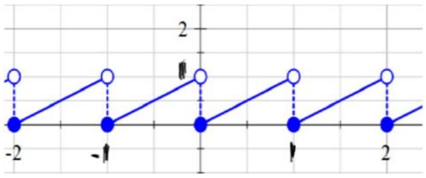
۳- نقاط حساس توابع چند ضابطه‌ای، $@x=1$ $\begin{cases}\ldots\ldots & x>1\\ \ldots\ldots & x<1\end{cases}$

۴- ریشه ساده زیر رادیکال فرجه زوج، $\sqrt{x}$

۵- ریشه ساده مخرج کسر، $\dfrac{1}{x-1}$

### ۲-۲-۱ مثال های اولیه

**مثال ۴)** حد تابع $x-[x]$ را وقتی x به سمت ۲ میل می کند، بدست آورید



$$\lim_{x\to 2^+} x-[x]=2^+-[2^+]=2^+-2=0^+\to 0$$

$$\lim_{x\to 2^-} x-[x]=2^--[2^-]=2^--1=1^-\to 1$$

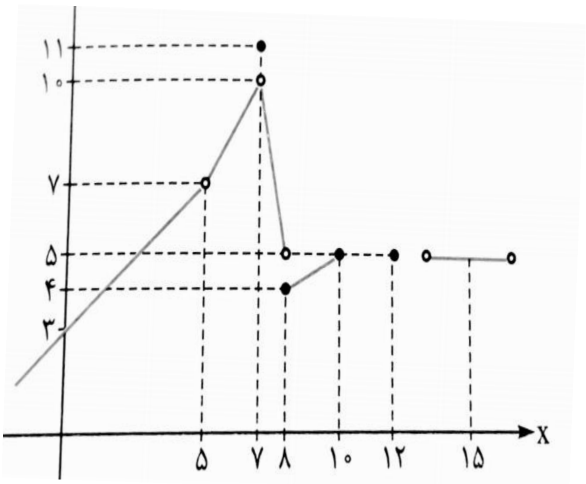
**مثال ۵)** حدود زیر را محاسبه کنید

1. $\lim_{x\to \frac{1}{2}} [x]$
2. $\lim_{x\to 1} [x]$
3. $\lim_{x\to 1} \frac{x}{|x|}$
4. $\lim_{x\to 0} \frac{x}{|x|}$
5. $\lim_{x\to 5} 1-\sqrt{x-1}=\lim_{x\to 5}(1-\sqrt{x-1})=1-\sqrt{5-1}=-1$
6. $\lim_{x\to 1} 1-\sqrt{x-1}=$

**مثال ۶)** اگر تابع $f(x)=\begin{cases} x^2+a & x<2 \\ b & x=2 \\ -x^2 & x>2 \end{cases}$ در نقطه ۲ حد داشته باشد،

مقادیر $a,b$ را بدست آورید.

**مثال ۷)** حدود زیر را محاسبه نمایید



$\lim_{x\to 7} f(x)=$

$\lim_{x\to 8^+} f(x)=$ $\qquad$ $\lim_{x\to 8^-} f(x)=$

$\lim_{x\to 8} f(x)=$

$\lim_{x\to 10} f(x)=$

$\lim_{x\to 12} f(x)=$

$\lim_{x\to 15} f(x)=$

دقت کنید در نقاط منفرد (x=12)، تابع حد ندارد مثل تابع

### ۳-۲-۱ مثال های ثانویه

**مثال ۸)** حدود زیر را محاسبه کنید

1. $\lim\limits_{x\to 1}(3x^2+5x+4)=3(1)^2+5(1)+4=12$

---

2. $\lim\limits_{x\to 3}(\sqrt{x^2-4x+3})=\sqrt{3^2-4(3)+3}=0$

$D_f: x^2-4x+3\geq 0 \Rightarrow (x-1)(x-3)\geq 0 \Rightarrow D_f=(-\infty,1]\cup[3,+\infty)$

$\Rightarrow$

---

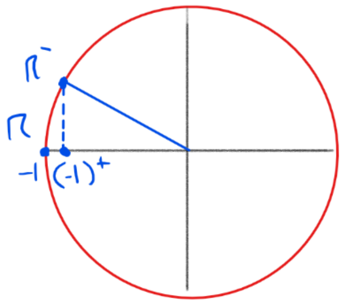
3. $\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{3[x]+1}{4}$

---

4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{[x]} \Rightarrow \begin{cases} x\to 0^+ : \lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x}{[x]}=\dfrac{0^+}{[0^+]}=\dfrac{0^+}{0_{exact}}=\times \\ x\to 0^- \end{cases} \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{[x]}=\times$

---

5. $\lim\limits_{x\to \pi^-}\dfrac{[\cos(x)]}{\cos([x])}$



$\Rightarrow\ x\to\pi^- : x>3 : [x]=[\pi^-]=3\ ,\ \cos(\pi^-)=(-1)^+$

$\lim\limits_{x\to \pi^-}\dfrac{[\cos(x)]}{\cos([x])}=\dfrac{[\cos(\pi^-)]}{\cos([\pi^-])}=\dfrac{[(-1)^+]}{\cos(3)}=\dfrac{-1}{\cos(3)}$

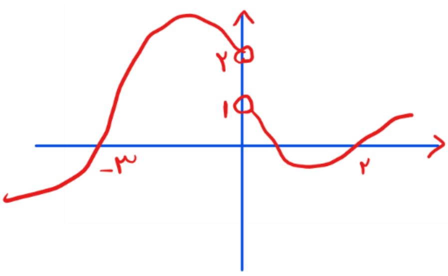
---

6. $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{[x]|x|}{x^2-3x} \Rightarrow x\to 0^- : x<0 \Rightarrow |x|=-x\ ,\ [x]=[0^-]=-1$

$\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{[x]|x|}{x^2-3x}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{(-1)(-x)}{x^2-3x}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{(x)}{(x)(x-3)}=\dfrac{1}{0-3}=\dfrac{-1}{3}$

برای محاسبه حد تا جاییکه می توانید تابع را ساده کنید !

**مثال ۹)** (تمرین)با توجه به نمودار زیر آیا حد روبرو وجود دارد؟ $\lim\limits_{x\to 0}f(x^2)+f(-x^2)$




$x\to 0 : x^2\to 0^+\quad ,\quad -x^2\to 0^-$

$\lim\limits_{x\to 0}f(x^2)+f(-x^2)=f(0^+)+f(0^-)=1+2=3$

اثبات کنید که برای همین شکل داریم : $\lim\limits_{x\to 0}f(x)+f(-x)=3$

### ۱-۲-۴ سه مساله خوفناک

**مثـال ۱۰)** اگر $f(x)=10x-4$ باشد حاصل موارد زیر را بدست آورید.

$$A=\lim_{x\to1^-} f(2x+1)=f(2(1^-)+1)=f(3^-)=10(3^-)-4=30^--4=26^-\to 26$$

---

$$B=\left[\lim_{x\to1^-} f(2x+1)\right]=[A]=[26_{exact}]=26$$

---

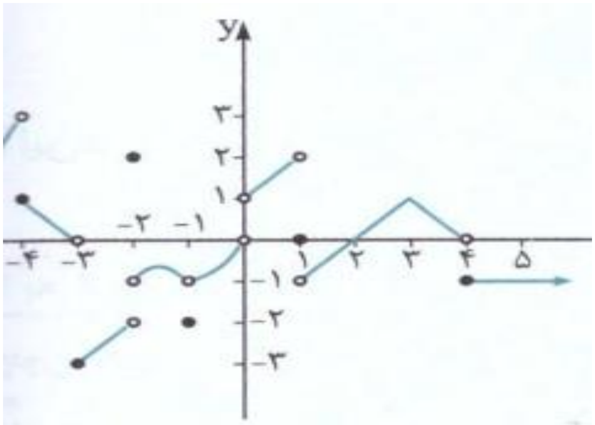
$$C=\lim_{x\to1^-}[f(2x+1)]=\lim_{x\to1^-}[f(3^-)]=\lim_{x\to1^-}[26^-]=25$$

پس هر گاه جزصحیح بیرون باشد موجودی بی آزار است اما اگر درون حد باشد باید بسیار مراقب باشید و دست به عصا حرکت کنید: DBA : یعنی حاصل تابع را خیلی با دقت محاسبه کنید: حدی است یا نه : اگر حدیه، بیشتر یا کمتر !!!

**مثـال ۱۱)** حاصل $\lim_{x\to0^+}\left[x^2-2x\right]$ را بدست اورید

$$\lim_{x\to0^+}\left[x^2-2x\right]=\lim_{x\to0^+}[(x)(x-2)]=[(0^+)(0-2)]=[(0^+)(-2)]=[0^-]=-1$$

**مثـال ۱۲)** (حد در توابع مرکب) با توجه به شکل تابع حدود زیر را محاسبه کنید




$$\lim_{x\to(-1)^-} f(|x|)$$

$$\lim_{x\to(\frac{2}{3})^+} f(-\frac{2}{x})$$

$$f(\lim_{x\to1^+} f(x))$$

$$\lim_{x\to3} fof(x)$$

**در توابع مرکب باید هر دوی VBB و DBA را به کار برید و تا حد رو حساب نکنیم آروم نمیگیریم!**

## ۱-۳ دو تابع خفن

### ۱-۳-۱ توابع صحیح و غیر آن

به فرم
$$h(x)=\begin{cases} g(x) & x\notin\mathbb{Z} \\ f(x) & x\in\mathbb{Z} \end{cases}$$

**تذکـــر ۹)** عدد حدی را نمیدانیم گنگ است یا گویا !! ولی عدد حدی را میدانیم غیرصحیح است!!
(غیر از بینهایت که اصلا عدد نیست)

در محاسبه حد این توابع در هر نقطه کافیست حد تابع غیرصحیح را مورد بررسی قرار دهیم
اما در بینهایت باید هر دو تابع مورد بررسی قرار دهیم چون بی نهایت یک مفهوم با اندازه بزرگ و نامشخص می باشد که نمیدانیم گنگ یا گویا یا صحیح یا غیر آن است!

**مثــال ۱۳)** اگر حد تابع $f(x)=\begin{cases} \dfrac{2x+a}{x+1} & x\notin\mathbb{Z} \\ \dfrac{ax}{x+1} & x\in\mathbb{Z} \end{cases}$ در نقطه به طول یک برابر با ۱- باشد، حد تابع در نقطه ۳ چقدر است ؟

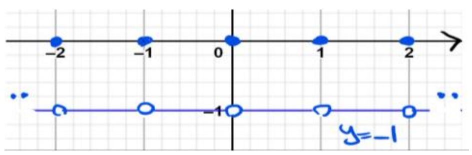
**مثــال ۱۴)** اگر تابع $f(x)=\begin{cases} 3x+1 & ;x\notin z \\ x+2 & ;x\in z \end{cases}$ باشد مقدار $\lim\limits_{x\to 4} fof(x)$ را بدست آورید

$$\lim_{x\to 4} fof(x)=fof(\sim 4)=f(3\times(\sim 4)+1)=f(\sim 13)$$
$$f(\sim 13)=3\times(\sim 13)+1=\sim 40\to 40$$

**مثــال ۱۵)** اگر تابع $f(x)=\begin{cases} 5 & ;x\notin z \\ 3 & ;x\in z \end{cases}$ باشد مقدار $\lim\limits_{x\to 1} fof(x)$ را بدست آورید

**مثــال ۱۶) (تمرین)** اگر تابع $f(x)=[x]+[-x]$ باشد حدود زیر را بدست آورید

$$\lim_{x\to 1} f(x)=?=(-1)$$
$$\lim_{x\to 1} fof(x)=?=f(-1_{exact})=0$$

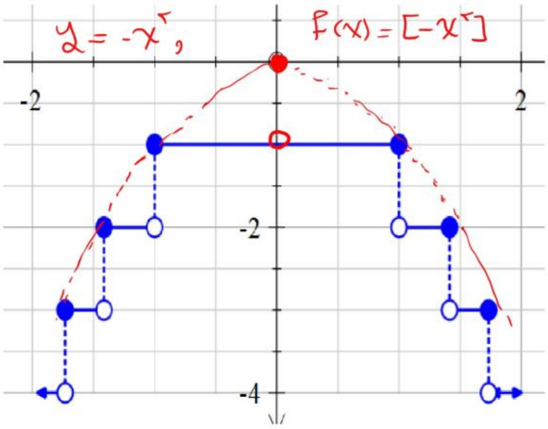


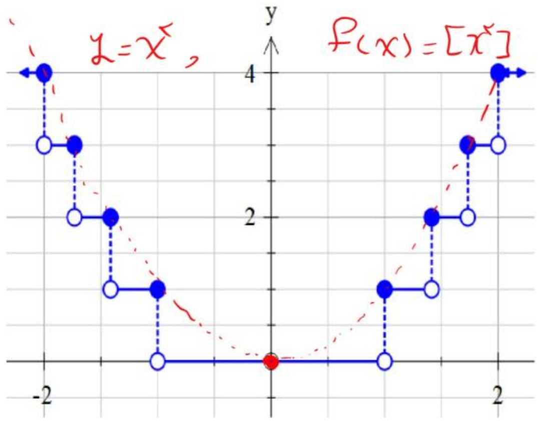

**مثــال ۱۷)** مقدار $\lim\limits_{x\to(\frac{-1}{10})^-}\left[\dfrac{1}{x}\right]$ را محاسبه کنید

$$x\to(\frac{-1}{10})^- \Rightarrow x<\frac{-1}{10} \Rightarrow \frac{1}{x}>-10 \Rightarrow \left[\frac{1}{x}\right]=-10$$

### ۲-۳-۱ توابع جزصحیح

در توابع به فرم $[f(x)]$ در نقاطی که درون جزصحیح ، صحیح گردد تابع حد ندارد مگر آنکه نقطه مورد بررسی max یا min نسبی باشد(قله ودره)




توابع به فرم $g(x)[f(x)]$ در نقاطی که $g(x)$ حد برابر با صفر دارد، فارغ از صحیح یا غیرصحیح شدن جزصحیح، حد برابر ۰ دارند. (نجات عامل صفر)

**مثال ۱۸)** توابع $[2x],[x^2],x[x]$ در فاصله $(-3,3)$ در چند نقطه حد ندارد؟

$$A.\ f(x)=[2x]\Rightarrow 2x=k\in\mathbb{Z}\Rightarrow x=\frac{k}{2}\Rightarrow -3<\frac{k}{2}<3$$

$$\Rightarrow -6<k<6: k=\{-5,-4,-3,-2,-1,0,1,2,3,4,5\}$$

$$x=\{\frac{-5}{2},-2,\frac{-3}{2},-1,\frac{-1}{2},0,\frac{1}{2},1,\frac{3}{2},2,\frac{5}{2}\}\Rightarrow 11\ points$$

---

$$B.\ f(x)=[x^2]\Rightarrow x^2=k\in\mathbb{Z}\Rightarrow x=\pm\sqrt{k}$$

$$\cancel{-\sqrt{9}},-\sqrt{8},-\sqrt{7},-\sqrt{6},-\sqrt{5},-\sqrt{4},-\sqrt{3},-\sqrt{2},-\sqrt{1},\cancel{0},\sqrt{1},\sqrt{2},\sqrt{3},\sqrt{4},\sqrt{5},\sqrt{6},\sqrt{7},\sqrt{8},\cancel{\sqrt{9}}\Rightarrow 2\times 8=16\ po\ int\,s$$

---

$$C.\ f(x)=x[x]$$

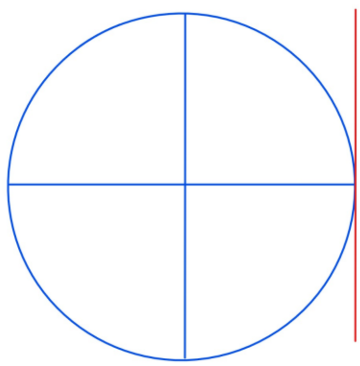
**مثال ۱۹)** حدود زیر را محاسبه کنید

$$1.\ \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}[\sin(x)]$$

$$\sin(\frac{\pi}{2}^{+})=1^{-}\quad \sin(\frac{\pi}{2}^{-})=1^{-}\quad \Rightarrow [1^{-}]=0$$

---

$$2.\ \lim_{x\to 0^{+}}\left[\tan(\frac{5\pi}{x+4})\right]=\left[\tan(\frac{5\pi}{4^{+}})\right]=\left[\tan(\frac{5\pi}{4})^{-}\right]=[1^{-}]=0$$



تا می توانید درون جزصحیح را ساده تر کنید یعنی x کمتر ببینید !

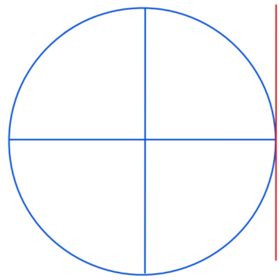
یک فرمول خفن مثلثاتی : $\sin(x)\pm\cos(x)=\sqrt{2}\sin(x\pm\frac{\pi}{4})$

**مثال ۲۰)** (تمرین) حد $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}[\sin(x)+\cos(x)]$ را محاسبه کنید

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}[\sin(x)+\cos(x)]=\left[\sqrt{2}\sin(x+\frac{\pi}{4})\right]$$

$$\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}=\frac{3\pi}{4}\qquad \sin(\frac{3\pi}{4})=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$x\to\frac{\pi}{2}^{+}:\left[\sqrt{2}(\frac{\sqrt{2}}{2}^{-})\right]=[1^{-}]\qquad x\to\frac{\pi}{2}^{-}:\left[\sqrt{2}(\frac{\sqrt{2}}{2}^{+})\right]=[1^{+}]\Rightarrow$$



**مثال ۲۱)** حدود مهم زیر را محاسبه نمائید.

$$1)\left[\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x^2+2}\right]$$

---

$$2)\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}\qquad 3)\left[\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}\right]\qquad 4)\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{1}{x}\right]$$

**مثال ۲۲)** به ازای کدام مقدار $a$ تابع $a[x]+[x+1]$ در ۱ حد دارد؟

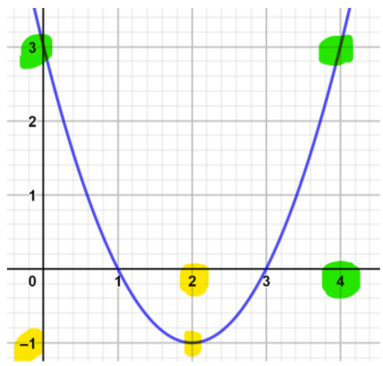
**مثال ۲۳)** حد تابع $y=[x^2-4x+3]$ را در $x\to 4$ , $x\to 2$ بررسی نمائید.

$$x^2-4x+3=(x-1)(x-3)\quad,\quad x^2-4x+3=(x-2)^2-1$$

$$\lim_{x\to 2}[x^2-4x+3]=\lim_{x\to 2}[(x-2)^2-1]=$$

$$[(\sim 0)^2-1]=[0^{+}-1]=[(-1)^{+}]=-1$$

$$\lim_{x\to 4}[x^2-4x+3]\to\begin{cases}\lim_{x\to 4^{+}}[(x-2)^2-1]=[2^{+2}-1]=[3^{+}]=3\\ \lim_{x\to 4^{-}}[(x-2)^2-1]==[2^{-2}-1]=[3^{-}]=2\end{cases}\to$$




$$\lim_{x\to 4}[x^2-4x+3]=\times$$

اگر در ریشه های تابع بخواهد می توانید از تجزیه استفاده کنید مثلا 1 بیشتر (متفرقه)

+ نکته استفاده از تابع صعودی و نزولی + یک مساله متفرقه

## ۱-۴ قضایای حد

### ۱-۴-۱ کتاب طور

۱. حد یک تابع ثابت برابر همان مقدار ثابت می باشد.

۲. حد تابع همانی (f(x)=x) برابر طول نقطه حد گیری می‌باشد.

۳. حد یک تابع چند جمله‌ای در هر نقطه برابر مقدار تابع در آن نقطه می‌باشد.

۴. $\lim\limits_{x\to a} k\times f(x)=k\times\lim\limits_{x\to a} f(x)$

۵. اگر f و g در x=a حد داشته باشند: (+ بحث صفر نشدن مخرج!)

$$\lim_{x\to a} f(x)\overset{\pm}{\underset{\times}{\div}}g(x)=\lim_{x\to a} f(x)\overset{\pm}{\underset{\times}{\div}}\lim_{x\to a} g(x)$$

$$\lim_{x\to a}\frac{1}{g(x)}=\frac{1}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}$$

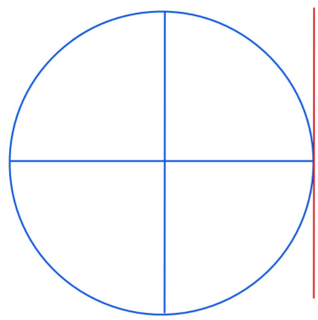
$$\lim_{x\to a}(f(x))^n=(\lim_{x\to a} f(x))^n \qquad \lim_{x\to a}(f(x))^{g(x)}=(\lim_{x\to a} f(x))^{\lim\limits_{x\to a} g(x)}$$

**مثـال ۲۴)** حاصل حد $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2+3x-1}{4x+1}$ را به کمک قضایای بیان شده پیدا کنید.

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2+3x-1}{4x+1}=\frac{\lim\limits_{x\to 1} x^2+3x-1}{\lim\limits_{x\to 1} 4x+1}=\frac{\lim\limits_{x\to 1} x^2+\lim\limits_{x\to 1} 3x-\lim\limits_{x\to 1} 1}{\lim\limits_{x\to 1} 4x+\lim\limits_{x\to 1} 1}=$$

$$\frac{(\lim\limits_{x\to 1} x)^2+3\lim\limits_{x\to 1} x-\lim\limits_{x\to 1} 1}{4\lim\limits_{x\to 1} x+\lim\limits_{x\to 1} 1}=\frac{1+3-1}{4+1}=\frac{3}{5}$$

۶. چند قضیه مثلثاتی



$$\lim_{x\to a}\cos(x)=\cos(a) \qquad \lim_{x\to a}\sin(x)=\sin(a)$$

$$\lim_{x\to 0}\sin(x)=0 \qquad \lim_{x\to 0}\cos(x)=1$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^+}\tan(x)=-\infty\ ,\ \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\tan(x)=+\infty$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\tan(x)=\times\ ,\ \lim_{x\to 0}\cot(x)=\times$$

### ۱-۴-۲ کنکور طور

**انتقال حد**

$$\lim_{x\to a} f(x)=L\leftrightarrow\lim_{x\to 0} f(x+a)=L$$

**مثـال ۲۵)** اگر برای تابع f(x) به ازای هر x و y داشته باشم $f(x+y)=f(x)f(y)$ و بدانیم حد تابع در صفر برابر ۱ می باشد ، حد تابع در x=2 کدام است؟

$$\lim_{x\to 2} f(x)=\lim_{x\to 0} f(x+2)=\lim_{x\to 0}(f(x)f(2))=$$

$$f(2)\lim_{x\to 0} f(x)=f(2)=f(1+1)=f^2(1)$$

**توابع متناوب در بی نهایت حد ندارند :** توابع زیر در نقطه داده شده حد ندارند:

$$\lim_{x\to\infty}\sin(x) \qquad \lim_{x\to 0}\sin(\frac{1}{x}) \qquad \lim_{x\to\infty}\cos(x) \qquad \lim_{x\to 0}\cos(\frac{1}{x})$$

به طور کلی توابع متناوب در بی نهایت به علت ماهیت نامشخص حد ندارند.

**قضیه معروف صفر ضربدر کراندار**

اول از همه به چه تابعی کران دار گویند ؟ به تابعی که مقادیر عرض آن (برد) محدود باشد یعنی به سمت مثبت یا منفی بی نهایت نرود ! مثل

بیان قضیه : اگر تابع g(x) در یک همسایگی محذوف $a$ کران‌دار باشد(چه حد داشته باشد چه نه) و بدانیم $\lim_{x\to a} f(x)=0$ خواهیم داشت : $\lim_{x\to a} f(x)g(x)=0$

**مثال ۲۶)** حاصل حدود زیر را پیدا کنید.

$$A=\lim_{x\to 0}\sin(\frac{1}{x})=\sin(\infty)=\times$$

$$B=\lim_{x\to 0}x\sin(\frac{1}{x})=(\sim 0)(\sin(\infty))=(\sim 0)(-1\le ..?..\le 1)=0$$

## ۵-۱ چند مثال ترکیبی (حد را فهمیدیم یا نه ؟!)

**مثال ۲۷)** حدود زیر را محاسبه کنید

$$f(x)=\begin{cases} x^2 & ;x\neq 0 \\ 1 & ;x=0\end{cases},\ g(x)=\begin{cases} 2x+5 & ;x\neq 0 \\ 4 & ;x=0\end{cases} \rightarrow \lim_{x\to 0} gof(x)=?$$

$$f(x)=\begin{cases} [x^2] & ;x\neq 0 \\ 1 & ;x=0\end{cases},\ g(x)=\begin{cases} 2x+5 & ;x\neq 0 \\ 4 & ;x=0\end{cases} \rightarrow \lim_{x\to 0} gof(x)=?$$

**مثال ۲۸) (تمرین)** نشان دهید تابع $f(x)=\begin{cases} 2 & ;x>0 \\ 1 & ;x<0\end{cases}$ در صفر حد ندارد ولی تابع $fof(x)$ در صفر حد دارد !

### ۱-۶ ماجراهای حد و اعمال روی توابع

الف) اگر دو تابع f و g در نقطه ای حد داشته باشند آنگاه توابع f  g نیز حد دارند.

ب) اگر یکی از دو تابع حد نداشته باشد، توابع f  g حد ندارند و تابع f  g امکان دارد.

ج) اگر هردو در این نقطه حد نداشته باشند، توابع f  g می توانند حد داشته باشند.

د) ماجرای قدرمطلق یک تابع : اگر تابع f در نقطه ای حد داشته باشد آنگاه تابع $|f|$ نیز در آن نقطه حد دارد . اما اگر تابع f در نقطه ای حد نداشته باشد تابع $|f|$ در آن نقطه شاید حد داشته باشد یا نداشته باشد.

مثال از دو تابعی که یکی حد دارد و یکی حد ندارد :

$f(x)=[x] \quad , g(x)=x \quad @x=0$

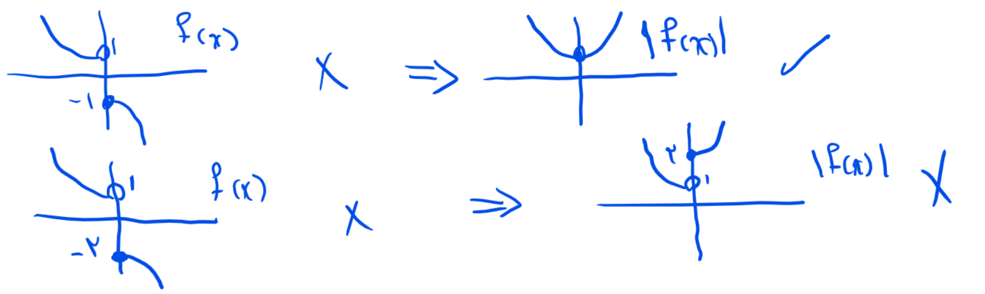
$*f+g=$ $\qquad\qquad\qquad$ $*f\times g=$

مثال از دو تابعی که حد ندارند :

$$f(x)=\begin{cases}1 & ;x>0\\ -1 & ;x<0\end{cases} \;,\; g(x)=\begin{cases}-1 & ;x>0\\ 1 & ;x<0\end{cases} \to f+g=\begin{cases}0 & ;x>0\\ 0 & ;x<0\end{cases} \quad @x=0$$

$$f(x)=\begin{cases}1 & ;x>0\\ -1 & ;x<0\end{cases} \;,\; g(x)=\begin{cases}2 & ;x>0\\ 1 & ;x<0\end{cases} \to f+g=\begin{cases}3 & ;x>0\\ 0 & ;x<0\end{cases} \quad @x=0$$

**مثال از داستان قدر مطلق**




**مثال ۲۹)** اگر دو تابع f و g  با  دامنه R مفروض باشند و f در a دارای حد متناهی باشد و g فاقد حد باشد آنگاه کدام یک از توابع زیر قطعا در a حد ندارد؟

$1)\dfrac{f}{|g|} \qquad 2)\dfrac{g}{|f|} \qquad 3)|f|+|g| \qquad 4)|f|g$

## ۱-۷ چند تمرین مهم

**مثـال ۳۰)** حدود زیر را بررسی کنید

$$\lim_{x\to 2}\sqrt{|x-2|(x-4)}$$

------------

$$f(x)=\frac{x-[x]}{|x|([x]+[-x])}\Rightarrow\begin{cases} x\to 0^+ & : f(x)=\frac{x}{x(-1)}=-1 \\ x\to 0^- & : f(x)=\frac{x+1}{-x(-1)}=\frac{1}{(0^-)}=-\infty\end{cases}$$

**مثـال ۳۱)** تابع $[x]-[x^2]$ در فاصله (۰،۲) در چند نقطه حد ندارد؟

۱) ۰ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

$$x=k=(1)$$
$$x^2=k\to x=\sqrt{k}$$
$$0<\sqrt{k}<2\to k<4:\quad x=\sqrt{k}=\sqrt{1},\sqrt{2},\sqrt{3}$$
$$x\to 1^+:\ [x]-[x^2]=1-1=0$$
$$x\to 1^-:\ [x]-[x^2]=0-0=0$$

پس دو نقطه $\sqrt{2},\sqrt{3}$ جواب اند .
هرگاه بخواهیم در یک بازه به سوال مشابه جواب دهیم (در جمع و تفریق چند تابع) باید ابتدا نقاط موجود در بازه هر تابع که خود آن تابع حد ندارد را مشخص نموده و آنگاه در نقاط غیر مشترک حد نداریم و در نقاط مشترک باید بررسی کنیم دقیقا مشابه مثال بالا

**مثـال ۳۲)** دو تابع f و g طوری مثال بزنید که در شرایط زیر صدق کنند !
fدر x = ۲ فاقد حد است، و g در x =2 حد دارد و $\frac{f}{g}$ در x = ۲ حد دارد.

**تمارین و موارد بیشتر در متفرقه**

### ۱-۸ حد صفر، صفرم !

اگر در محاسبه حد به یکی از حالات $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, 0\times\infty, \infty-\infty$ برخوردید حاصل حد را مبهم می گویند بدین معنا که با عملیات صورت گرفته، نمی توان حاصل حد را مشخص کرد و باید رفع ابهام صورت گیرد تا پاسخ حد بدست آید. حال هر کدام از موارد فوق را جداگانه مورد بررسی قرار می دهیم و مفاهیم آن‌ها و همچنین روند حل مساله در هر قسمت را بیان می کنیم.

البته در سال یازدهم فقط به بررسی ابهام $\frac{0}{0}$ می پردازیم و سایرین را در سال دوازدهم می خوانیم.

**بد نسیت بدانیم دقیقا صفر، صفرم به چه حالتی می گویند ؟؟**

1) نامعین $= \frac{\text{هرچی}}{\text{صفرمطلق}}$ ۲) $\circ = \frac{\text{صفرمطلق}}{\text{صفرنسبی}}$ 3) $\circ = \frac{\text{صفرنسبی}}{\text{عددغیرصفر}}$

۴) مبهم $= \frac{\text{صفرنسبی}}{\text{صفرنسبی}}$ ۵) $\infty = \frac{\text{عددغیرصفر}}{\text{صفرنسبی}}$ ۶) $\circ = \frac{\text{صفرمطلق}}{\text{عددغیرصفر}}$

فلسفه اصلی رفع ابهام ساده سازی و حذف عامل صفر می باشد !

$$0)\ \lim_{x\to 4}\frac{x^2-4x}{x^2-16} = \lim_{x\to 4}\frac{x\cancel{(x-4)}}{(x+4)\cancel{(x-4)}} = \frac{4}{4+4} = \frac{1}{2}$$

حالا در ۴ قسمت (چند جمله ای و رادیکالی و مثلثاتی و مثال های خفن) به بررسی این ماجرای بسیار مهم می پردازیم

#### ۱-۸-۱ چند جمله ای

##### ۱-۸-۱-۱ حل عادی

$$1)\ \lim_{x\to 2}\frac{x^3-8}{x^2-4} = \lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x^2+2x+4)}{(x-2)(x+2)} = \lim_{x\to 2}\frac{(x^2+2x+4)}{(x+2)} = \frac{4+4+4}{2+2} = 3$$

---

$$2)\ \lim_{x\to 1^+}\frac{2x^2-x-1}{\left|x^2-x^3\right|}$$

---

$$3)\ \lim_{x\to 2^+}\frac{x^2[x]-8}{x[x]-4} \Rightarrow x\to 2^+ : [x]=2 \Rightarrow$$

$$\lim_{x\to 2^+}\frac{2x^2-8}{2x-4} = \lim_{x\to 2^+}\frac{2(x^2-4)}{2(x-2)} = \lim_{x\to 2^+}\frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)} = 2+2 = 4$$

**در موارد جزصحیح و قدر مطلق همواره سعی بر کشتن آن ها داریم!**

4) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3+7x-8}{x^2-1}$

$\Rightarrow x^3+7x-8=x^3-x+x+7x-8=x(x^2-1)+8x-8=x(x-1)(x+1)+8(x-1)$

$\Rightarrow x^3+7x-8=(x-1)(x(x+1)+8)=(x-1)(x^2+x+8)$

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3+7x-8}{x^2-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x^2+x+8)}{(x-1)(x+1)}=\frac{1+1+8}{1+1}=5$$

**۲-۱-۸-۱ حل حرفه ای- هوپیتال و مشتق**

هر گاه در محاسبه یک حد به ابهام صفر، صفرم برخوردید میتوانید از این روش استفاده کنید به این ترتیب که به جای صورت عبارت ، مشتق آن را قرار دهید و در مخرج عبارت هم بجای خود مخرج، مشتق آن را قرار دهید و سپس به محاسبه حد بپردازید که چند حالت می تواند رخ دهد :
اگر به یک عدد رسیدید که پاسخ مساله است و تمام . . اگر دوباره به صفر، صفرم برخوردید ، میتوانید یکبار دیگر همین کار را تکرار کنید (حتی تا ۱۰ بار هم متوالیا می توانید استفاده کنید!)

$y=a\to y'=0\ ,\ \ y=ax\to y'=a\quad y=2x\to y'=2$

$y=x^2\to y'=2x\ ,\ y=x^3\to y'=3x^2\ ,\ y=x^n\to y'=nx^{n-1}\ ,\ y=ax^n\to y'=anx^{n-1}$

$y=4x^5\to y'=4(5)x^4=20x^4$

$y=4x^5+3x^2-6x+1\to y'=20x^4+6x-6$

---

$y=au^n\to y'=anu^{n-1}u'$

$y=3(6x^2+2x-2)^4\to y'=3(4)(6x^2+2x-2)^3(12x+2)$

---

$y=\sqrt{x}=x^{\frac{1}{2}}\to y'=\frac{1}{2}(x)^{\frac{1}{2}-1}=\frac{1}{2}(x)^{\frac{-1}{2}}=\frac{1}{2\sqrt{x}}\quad ,\quad y=\sqrt[3]{x}=x^{\frac{1}{3}}\to y'=\frac{1}{3}(x)^{\frac{1}{3}-1}=\frac{1}{3}(x)^{\frac{-2}{3}}$

$y=\sqrt{u}=u^{\frac{1}{2}}\to y'=\frac{1}{2}(u)^{\frac{1}{2}-1}\times u'=\frac{1}{2}(u)^{\frac{-1}{2}}\times u'=\frac{u'}{2\sqrt{u}}$

$y=\sqrt{x^3+2x^2}=(x^3+2x^2)^{\frac{1}{2}}\to y'=\frac{1}{2}(x^3+2x^2)^{\frac{1}{2}-1}\times(3x^2+4x)$

---

$y=\sqrt[m]{u^n}=u^{\frac{n}{m}}\to y'=\frac{n}{m}(u)^{\frac{n}{m}-1}\times u'$

$y=\sqrt[4]{(x^3+4x)^3}=(x^3+4x)^{\frac{3}{4}}\to y'=\frac{3}{4}(x^3+4x)^{\frac{3}{4}-1}\times(3x^2+4)$

---

$y=\sqrt{1+\sqrt{x}}=(1+x^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}}\to y'=\frac{1}{2}(1+x^{\frac{1}{2}})^{\frac{-1}{2}}\ (0+\frac{1}{2}x^{\frac{-1}{2}})$

---

حل مثال بالا با هوپیتال

### ۲-۸-۱ رادیکالی + هم ارزی

یاد آوری : ایده اساسی استفاده از مزدوج می باشد.

$$a^2-b^2=(a-b)(a+b)$$

$$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2) \qquad a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$$

$$a^n-b^n=(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+\ldots+ab^{n-2}+b^{n-1}) \qquad n\in\mathbb{N}$$

$$a^n+b^n=(a+b)(a^{n-1}-a^{n-2}b+\ldots-ab^{n-2}+b^{n-1}) \qquad n=2k+1$$

**مثال ۳۳)** حاصل حدود زیر را بدست آورید (حل تشریحی)

$$1)\lim_{x\to2}\frac{\sqrt{x-1}-1}{x-2}=\frac{0}{0}\Rightarrow\times\frac{\sqrt{x-1}+1}{\sqrt{x-1}+1}\Rightarrow$$

$$\lim_{x\to2}\frac{(x-1)-1}{x-2}\times\frac{1}{\sqrt{x-1}+1}=\lim_{x\to2}\frac{1}{\sqrt{x-1}+1}=\frac{1}{\sqrt{2-1}+1}=\frac{1}{2}$$

---

$$2)\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt[3]{x}-1}=\frac{0}{0}\Rightarrow\times\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1}\times\frac{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1}{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1}=$$

$$\lim_{x\to1}\frac{x-1}{x-1}\times\frac{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1}{\sqrt{x}+1}=\frac{1+1+1}{1+1}=\frac{3}{2}$$

**مثال ۳۴)** حاصل حدود زیر را بدست آورید (حل تستی)

$$3)\lim_{x\to1}\frac{x^{2.5}-1}{x-1}=\frac{0}{0}\Rightarrow HP\ \lim_{x\to1}\frac{2.5x^{1.5}}{1}=2.5$$

---

$$4)\lim_{x\to-1}\frac{x+\sqrt{x+2}}{x^3+7x+8}=\frac{0}{0}\Rightarrow HP$$

---

$$5)\lim_{x\to-1}\frac{\sqrt{4x^2+x+1}+3x+1}{\sqrt[3]{5x-3}+2}=\frac{0}{0}\Rightarrow$$

$$HP\ \lim_{x\to-1}\frac{\frac{1}{2}(8x+1)(4x^2+x+1)^{\frac{-1}{2}}+3}{\frac{1}{3}5(5x-3)^{\frac{-2}{3}}}=\frac{\frac{1}{2}(-7)(4)^{\frac{-1}{2}}+3}{\frac{5}{3}(-8)^{\frac{-2}{3}}}=\frac{\frac{-7}{4}+3}{(\frac{5}{3})(\frac{1}{4})}=\frac{\frac{5}{4}}{\frac{5}{12}}=3$$

حل تشریحی مورد آخر: تمرین : پاسخ در متفرقه

**بیان هم ارزی کم توان با یک مثال + مفهوم آن !**

هم ارزی یعنی چی ؟ هم ارزی در ریاضی به معنای تقریب است و یعنی استفاده از یک صورت ساده تر بجای یک ظاهر پیچیده

$$\square^n+\square^{n-1}+\square^{n-2}+\dots\dots+\square^m \sim \square^m \qquad \square\to 0$$

$$(x-6)^5+3(x-6)^3-2(x-6)^2 \sim -2(x-6)^2 \qquad x\to 6$$

**مثال ۳۵)** حاصل حد زیر را بدست آورید

$$\lim_{x\to 0}\frac{x+\sqrt[3]{x}+2x^2}{\sqrt[3]{8x}+x^3} \sim \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{8x}}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{x}}{2\sqrt[3]{x}}=\frac{1}{2}$$

**هم ارزی برنولی –دنیل جون**

$$(a+b)^n=\binom{n}{0}a^n+\binom{n}{1}a^{n-1}b^1+\binom{n}{2}a^{n-2}b^2+\dots+\binom{n}{n}b^n$$

$$\textit{Daniel Bernoulli}\quad (u\to 0)\Rightarrow\quad (1+u)^m\sim 1+mu \qquad \sqrt[m]{(1+u)}\sim 1+\frac{u}{m}$$

---

$$a)\ \lim_{x\to 0}\frac{(1+4x)^3-(1+2x)^4}{(1-3x)^4-1}$$

---

$$b)\ \lim_{x\to 0}\frac{(1+4x)^3-(1+3x)^4}{2x^2}\sim$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+4x(3))-(1+3x(4))}{2x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{(1+12x)-(1+12x)}{2x^2}=0 \ \times\ !!$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+4x)^3-(1+3x)^4}{2x^2}=\frac{0}{0}\Rightarrow HP\quad \lim_{x\to 0}\frac{3\times 4\times(1+4x)^2-4\times 3\times(1+3x)^3}{4x}=\frac{0}{0}\Rightarrow HP$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{12\times 2\times 4\times(1+4x)^1-12\times 3\times 3\times(1+3x)^2}{4}=\frac{12(8-9)}{4}=-3$$

---

**تذکر ۷)** هر وقت هم ارزی به کار بردید و به (حسن – حسن) رسیدید بدانید که غ حل کردید!

یک تمرین – پاسخ در متفرقه

**مثال ۳۶)** حاصل حد $\lim_{x\to 4}\frac{(x-1)^4-(2x-3)^4}{2x-4}$ کدام است؟

۱) ۱۶- ۲) ۸- ۳) ۴- ۴) ۲-

$$c)\ \lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[5]{x}-1}{\sqrt[7]{x}-1}$$

$$***I)\ \lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[5]{x}-1}{\sqrt[7]{x}-1}\times\frac{\sqrt[5]{x^4}+\sqrt[5]{x^3}+\sqrt[5]{x^2}+\sqrt[5]{x^1}+1}{\sqrt[5]{x^4}+\sqrt[5]{x^3}+\sqrt[5]{x^2}+\sqrt[5]{x^1}+1}\times\frac{\sqrt[7]{x^6}+\sqrt[7]{x^5}+\sqrt[7]{x^4}+\ldots+\sqrt[7]{x^1}+1}{\sqrt[7]{x^6}+\sqrt[7]{x^5}+\sqrt[7]{x^4}+\ldots+\sqrt[7]{x^1}+1}=$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{x-1}\times\frac{\sqrt[7]{x^6}+\sqrt[7]{x^5}+\sqrt[7]{x^4}+\ldots+\sqrt[7]{x^1}+1}{\sqrt[5]{x^4}+\sqrt[5]{x^3}+\sqrt[5]{x^2}+\sqrt[5]{x^1}+1}=\frac{6+1}{4+1}=\frac{7}{5}$$

$$***II)HOP:\ \lim_{x\to 1}\frac{x^{\frac{1}{5}}-1}{x^{\frac{1}{7}}-1}=HP\ \lim_{x\to 1}\frac{\frac{1}{5}x^{\frac{-4}{5}}}{\frac{1}{7}x^{\frac{-6}{7}}}=\frac{\frac{1}{5}}{\frac{1}{7}}=\frac{7}{5}$$

**برنولیش کجاست وفائی ؟؟!! ایده تغییر متغیر**

$$***III)x-1=t\ \text{and Daniel jaan!}\Rightarrow x=t+1\Rightarrow t\to 0$$

$$\lim_{t\to 0}\frac{(1+t)^{\frac{1}{5}}-1}{(1+t)^{\frac{1}{7}}-1}=\lim_{t\to 0}\frac{1+\frac{t}{5}-1}{1+\frac{t}{7}-1}=\lim_{t\to 0}\frac{\frac{t}{5}}{\frac{t}{7}}=\frac{7}{5}$$

کاربرد اساسی برنولی در موارد رادیکالی و عبارت توان دار است که زیر رادیکال یا پایه در نقطه حد گیری برابر یک باشد و همچنین گاهی اوقات با تغییر متغیر مشابه مثال قبلی می توان بسیار ساده مساله را حل کرد $x\to x_\circ \Rightarrow x-x_\circ=t \Rightarrow x=t+x_\circ\ ,\ t\to 0$

اصولا اگر ایده تغییر متغیر لازم شود مشابه مورد قرمز رنگ بالا انجام می شود اما نه همیشه و بعضی اوقات میشه ایده های جالبی رو ب کار برد . تمرین زیر را کار کنید

**مثـال ۳۷)(تمرین )** حاصل حد $\lim_{x\to 2}\frac{x-\sqrt[3]{x-1}-1}{x-2}$ را بدست آورید

$$\sqrt[3]{x-1}=t\ \Rightarrow\ x=t^3+1\ ,t\to 1$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{x-\sqrt[3]{x-1}-1}{x-2}=\lim_{t\to 1}\frac{t^3+1-t-1}{t^3+1-2}=\lim_{t\to 1}\frac{t^3-t}{t^3-1}=\ldots\ldots\ldots$$

این سوال با برنولی و هوپیتال و تشریحی (اشک ها جاری می شود !) نیز حل می شود . با برنولی و هوپیتال سعی کنید بنویسید . برای برنولی دقت کنید که زیر رادیکال در نقطه حد گیری برابر یک می باشد و با ایده تغییر متغیر بیان شده در نکته بمبی بالا بسادگی حل می شود !

**چند مورد در متفرقه**

### ۳-۸-۱ مثلثاتی

**مثال ۳۸)** حدود زیر را محاسبه کنید

$$1)\ \lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{1-\cos x}$$

---

$$2)\ \lim_{x\to(\frac{\pi}{2})^+}\frac{|\cos x|}{\sin 2x} \qquad x\to(\frac{\pi}{2})^+ : x>(\frac{\pi}{2}) : \cos x<0 : |\cos x|=-\cos x$$

$$\lim_{x\to(\frac{\pi}{2})^+}\frac{|\cos x|}{\sin 2x}=\lim_{x\to(\frac{\pi}{2})^+}\frac{-\cos x}{2\sin x\ \cos x}=\lim_{x\to(\frac{\pi}{2})^+}\frac{-1}{2\sin x}=\frac{-1}{2}$$

---

$$3)\ \lim_{x\to\frac{3\pi}{4}}\frac{\cos 2x}{1+\cot x}=\lim_{x\to\frac{3\pi}{4}}\frac{\cos^2 x-\sin^2 x}{1+\frac{\cos x}{\sin x}}=\lim_{x\to\frac{3\pi}{4}}\frac{\cos^2 x-\sin^2 x}{\frac{\sin x+\cos x}{\sin x}}=$$

$$\lim_{x\to\frac{3\pi}{4}}\frac{\sin x(\cos x-\sin x)(\cos x+\sin x)}{\sin x+\cos x}=\lim_{x\to\frac{3\pi}{4}}\sin x(\cos x-\sin x)=\frac{\sqrt{2}}{2}(\frac{-\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2})=-1$$

---

$$4)\ \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1-\sin x}{\cos x}=? \qquad \times$$

سوال بالا را با تغییر متغیر و روابط دو برابر کمان حل کنید $(x=\frac{\pi}{2}+t)$ , $(x-\frac{\pi}{2}=t\to 0)$

**مثال ۳۹)** **(تمرین)** حد زیر را محاسبه کنید

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\sin x-\cos x}{\tan x-1}=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\sin x-\cos x}{\frac{\sin x}{\cos x}-1}=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\sin x-\cos x}{\frac{\sin x-\cos x}{\cos x}}=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\cos x=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

### ۴-۸-۱ مثال های خفن

**نمایی و لگاریتمی (دومی تمرین)**

$$1)\ \lim_{x\to 0}\frac{4^x-1}{2^x-1} \qquad 2^x=t\to 1 \quad \Rightarrow 4^x=2^{(2x)}=(2^x)^2=t^2$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{4^x-1}{2^x-1}=\lim_{t\to 1}\frac{t^2-1}{t-1}=\lim_{t\to 1}\frac{(t-1)(t+1)}{t-1}=\lim_{t\to 1}(t+1)=1+1=2$$

---

$$2)\ \lim_{x\to 2}\frac{Log_2^{\frac{x}{2}}}{2-Log_2^{x^2}}=\frac{-1}{2}$$

## یک ماجرای مهم و کنکوری

اگر $\lim\limits_{x\to a}\frac{f}{g}$ موجود باشد و $\lim\limits_{x\to a} g=0$ آنگاه حتما $\lim\limits_{x\to a} f=0$

خلاصه مفید : مخرج صفر شد در نتیجه صورت هم صفر است و برعکس

**مثـال۴۰)** اگر $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2+ax+4}{x^2-1}=b\in\mathbb{R}$ باشد ، حاصل $a+b$ چقدر است ؟

**مثـال۴۱)** اگر بدانیم $\frac{3}{2}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt{ax+b}-2}{x^2-1}$ ، آنگاه حاصل $b-a$ چقدر است ؟

چون مخرج صفر می شود در نتیجه صورت هم صفر : $\sqrt{a+b}-2=0\Rightarrow a+b=4$

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{ax+b}-2}{x^2-1}=\frac{0}{0}\Rightarrow HP\ \lim_{x\to 1}\frac{\frac{1}{2}a(ax+b)^{\frac{-1}{2}}}{2x}=$$

$$\frac{1}{4}a(a+b)^{\frac{-1}{2}}=\frac{1}{4}a\frac{1}{\sqrt{(a+b)}}=\frac{1}{4}a(\frac{1}{2})=\frac{3}{2}\to a=12\to b=4-a=-8$$

### ۲ مثال جالب (اولی تمرین)

**مثـال۴۲)** اگر $f(x)=\frac{\left|\sqrt[3]{x}+1\right|}{x^2+4x+3}$ باشد، حاصل $\lim\limits_{x\to\pi} f(\cos x)$ را بدست آورید

$$\lim_{x\to\pi} f(\cos x)=\lim_{x\to\pi} f(\cos(\sim\pi))=f(-1)^{+}=\lim_{x\to(-1)^+} f(x)=$$

$$\lim_{x\to(-1)^+}\frac{\left|\sqrt[3]{x}+1\right|}{x^2+4x+3}\Rightarrow\sqrt[3]{(-1)^+}+1>0\Rightarrow\lim_{x\to(-1)^+}\frac{\sqrt[3]{x}+1}{x^2+4x+3}\times\frac{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{x}+1}{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{x}+1}$$

$$=\lim_{x\to(-1)^+}\frac{x+1}{(x+1)(x+3)}\times\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{x}+1}=\lim_{x\to(-1)^+}\frac{1}{(x+3)}\times\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{x}+1}=\frac{1}{6}$$

**مثـال۴۳)** حد زیر را محاسبه کنید

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+4x)(1+3x)(1+2x)(1+x)-1}{x}$$

$$\sim\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^4(1+x)^3(1+x)^2(1+x)-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^{10}-1}{x}\sim\lim_{x\to 0}\frac{(1+10x)-1}{x}=\frac{10x}{x}=10$$

حل تشریحی چطور ؟؟؟ باید ضرب کنید اما می توانید این کار را هوشمندانه انجام دهید!

### مثال های بیشتر در متفرقه

## 2 بخش ۲، پیوستگی

### ۲-۱ تعریف

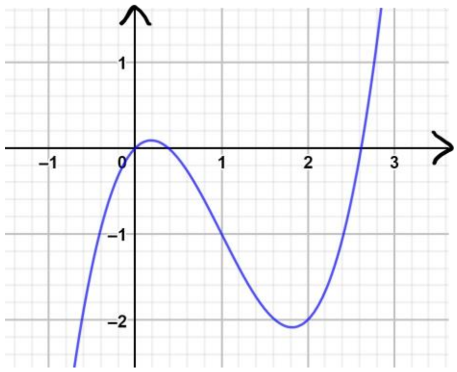
گوییم تابع f در نقطه $x=a$ پیوسته است هرگاه $\lim_{x\to a} f(x)=f(a)$ باشد.

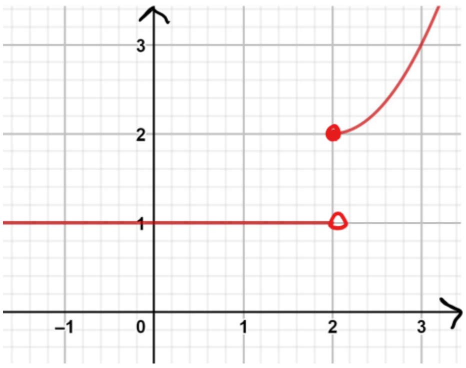
پس باید شرایط زیر برقرار باشد

۱) وجود همسایگی نامحذوف a در دامنه، یعنی خود a و دوست و رفقاش در دامنه باشند.

۲) وجود حد حقیقی در نقطه مورد نظر و برابری با مقدار تابع در آن نقطه

چرا کلمه پیوستگی انتخاب شده؟؟!!



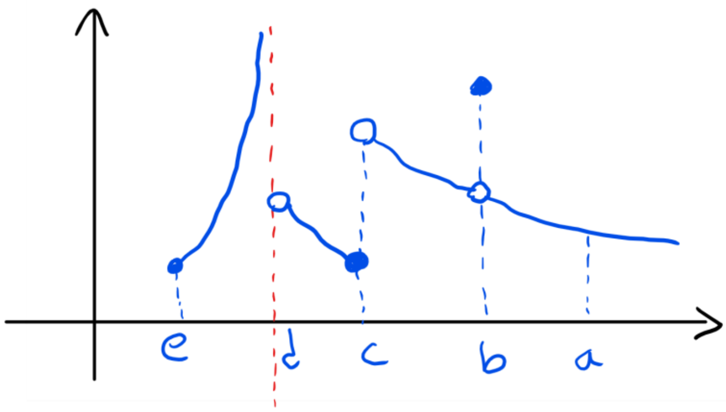




**پیوستگی یک طرفه**

گوییم تابع f در نقطه $x=a$ پیوسته راست است هرگاه $\lim_{x\to a^+} f(x)=f(a)$ باشد.

گوییم تابع f در نقطه $x=a$ پیوسته چپ است هرگاه $\lim_{x\to a^-} f(x)=f(a)$ باشد.

**بررسی تعاریف با یک مثال**




این تابع در نقطه $x=a$ ، پیوسته است .

این تابع در نقطه $x=b$ ، ناپیوسته است ولی حد دارد.

این تابع در نقطه $x=c$ ، ناپیوسته است ولی از چپ پیوسته است .

این تابع در نقطه $x=d$ ، ناپیوسته است و همچنین از چپ و از راست ناپیوسته است.

این تابع در نقطه $x=e$ ، ناپیوسته است ولی از راست پیوسته است.

## ۲-۲ مثال های اولیه

**مثال ۴۴)** آیا تابع $f(x)=\begin{cases} x^2+1 & x>1 \\ 3x-1 & x<1 \end{cases}$ در ۱ پیوسته هست؟ اگر نه چه کنیم که باشد؟

**مثال ۴۵)** اگر تابع $f(x)=\begin{cases} 3x\left[\frac{1}{x}\right]+3x[x] & x\neq 1 \\ a & x=1 \end{cases}$ در ۱ پیوسته باشد، مقدار $a$ چقدر است؟

$$\lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^+} 3x\left[\frac{1}{x}\right]+3x[x]=3(1)\left[\frac{1}{1^+}\right]+3(1)\left[1^+\right]=3\left[1^-\right]+3(1)=0+3=3$$

$$\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^-} 3x\left[\frac{1}{x}\right]+3x[x]=3(1)\left[\frac{1}{1^-}\right]+3(1)\left[1^-\right]=3\left[1^+\right]+3(0)=3+0=3$$

**مثال ۴۶)** $f(x)=\begin{cases} \frac{x-|x|}{x} & x\neq 0 \\ a & x=0 \end{cases}$ در مبدا پیوسته هست، مقدار $a$ کدام است؟

$x\to 0^+=\frac{x-x}{x}=0$ $\qquad$ $x\to 0^-=\frac{x-(-x)}{x}=2$

**مثال ۴۷)** مقدار $a$ را چنان پیدا کنید که تابع $x[2x]+a[x]$ ، در نقطه x=۱ ، پیوسته باشد؟

**مثال ۴۸)** اگر تابع $f(x)=\begin{cases} \frac{x^2+x-a}{|x-3|} & ;x\neq 3 \\ b & ;x=3 \end{cases}$ در نقطه $x=3$ پیوسته راست باشد، مقادیر $a,b$ را بیابید

باید حد راست تابع در نقطه ۳ برابر با مقدار تابع یعنی b باشد و چون مخرج صفر می شود پس صورت هم باید صفر باشد . داریم : $3^2+3-a=0\Rightarrow a=12$

$$\lim_{x\to 3^+}\frac{x^2+x-12}{|x-3|}=\lim_{x\to 3^+}\frac{(x-3)(x+4)}{x-3}=x+4=7=b$$

در حیطه کار ما در کتاب درسی و کنکور تا سر و کله جزصحیح پیدا نشده باشد فقط نگران دامنه هستیم برای پیوستگی . دقت کنیم که در کتاب نظام جدید تارگت پیوستگی کل مجموعه اعداد حقیقی هست و پیوستگی بصورت نقطه به نقطه بررسی می شود

**مثــال ۴۹)** نقاط ناپیوسته تابع $f(x)=\sqrt{2-x-x^2}$ را در دامنه تعریف تابع بدست آورید

$$f(x)=\sqrt{2-x-x^2}\Rightarrow 2-x-x^2\geq 0\Rightarrow -2\leq x\leq 1\Rightarrow [-2,1]$$

**تذکــر ۸)** در نظام جدید پاسخ مساله بالا بدون به کار بردن (( در دامنه تعریف تابع )) جواب طنز بیشمار می‌باشد.

**مثــال ۵۰)** تابع $f(x)=\dfrac{x+1}{x^2+ax+a+3}$ در مجموعه اعداد حقیقی پیوسته است .
مجموعه ی مقادیر $a$ را بیابید

**مثــال ۵۱)** نقاط ناپیوسته تابع $f(x)=\begin{cases} x^2 & ; x^2\geq 2x \\ x+2 & ; x^2<2x \end{cases}$ را تعیین کنید

مجموعه جواب نامعادله $x^2<2x$ به صورت $0<x<2$ می باشد ، پس داریم

$$f(x)=\begin{cases} x^2 & ; x\geq 2, x\leq 0 \\ x+2 & ; \quad 0<x<2 \end{cases}$$

فقط نگران نقاط مرزی هستیم که

**پس برای توابع چند ضابطه ای**

وقتی پیوسته است که:

۱- تک تک ضابطه ها در دامنه اختصاصی خود پیوسته باشند.

۲- در نقاط حساس نیز باید بررسی پیوستگی صورت پذیرد.

**یک تمرین باحال**

**مثــال ۵۲)** اگر $f(x)=\begin{cases} \dfrac{3a-12}{x-a} & x\leq 1 \\ \dfrac{3a}{x+1} & x>1 \end{cases}$ روی R پیوسته باشد، مقدار $a$ کدام است ؟

بررسی پیوستگی درx=1

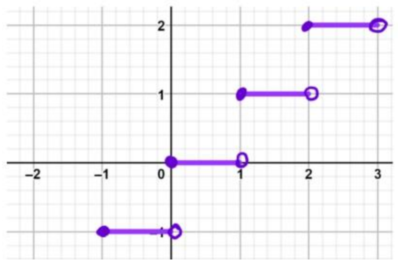
$$\lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^-} f(x)=f(1) \quad\Rightarrow\quad \frac{3a}{2}=\frac{3a-12}{1-a}$$

$$a^2+a-8=0\Rightarrow a=\frac{-1\pm\sqrt{33}}{2}\rightarrow\begin{cases} 2/.. \\ -3/.. \end{cases}$$

**کنترل مخرج ها حتما باید** $-1<1 \ , a>1$

## ۲-۳ تابع لعنتی جزصحیح

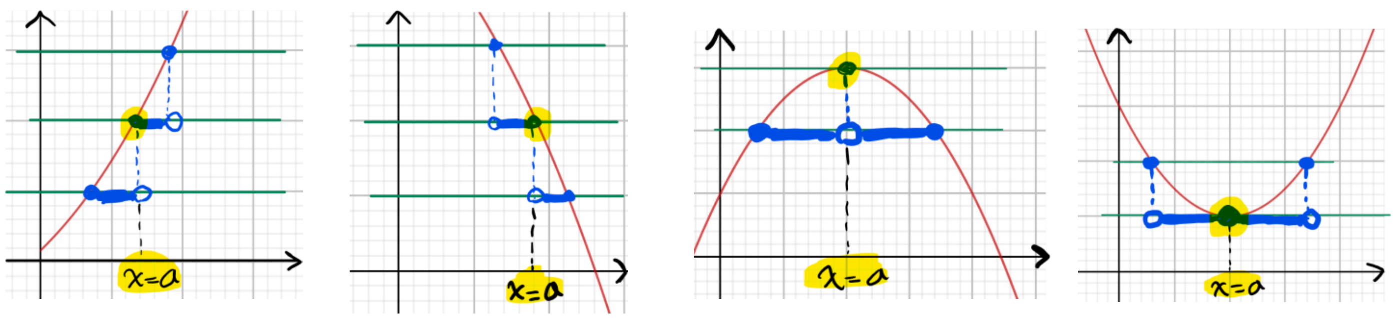
مقدمه :




شکل مقابل نمودار تابع $f(x)=[x]$ است همان طور که میبینیم
این تابع روی $\mathbb{R}-\mathbb{Z}$ پیوسته است و در سایر نقاط ناپیوسته است
البته پیوستگی راست دارد.
کلا هر وقت داخل جزصحیح، صحیح شود این تابع عصبی می شود

فرض کنید تابع $f(x)$ در نقطه $x=a$ پیوسته است و در یک همسایگی $a$ تعریف شده باشد و
همچنین تابع g به شکل $g(x)=[f(x)]$ تعریف شده باشد . داریم :
اگر $f(a)\notin\mathbb{Z}$ ، تابع $g(x)$ در نقطه $x=a$ پیوسته است
اگر $f(a)\in\mathbb{Z}$ ، تابع $g(x)$ در نقطه $x=a$ ناپیوسته است مگر اینکه f در آن نقطه دره باشد .
قله = ماکسیمم نسبی      دره = مینیمم نسبی
در حالتی که داخل جزصحیح، صحیح می شود داستان داریم و در قالب یک جمعبندی
اگر دره باشد نجات می یابد و پیوسته می شود (نجات دره)
اگر قله باشد ناپیوسته است ولی حد دارد.
اگر دو حالت بالا نباشد، یعنی در سایر موارد، ناپیوسته است و اگر بدانیم تابع f صعودی اکید است،
تابع g پیوستگی راست دارد (نزولی اکید : پیوستگی چپ)

**فهم بیشتر :**




**مثال ۵۳)** تعداد نقاط ناپیوستگی توابع زیر را در بازه داده شده ، بدست آورید

1. $2[-2x+1], x\in(-2,2) \quad\Rightarrow\quad 2([-2x]+1)=2[-2x]+2 \Rightarrow [-2x]$

$-2x=k\in z \Rightarrow x=-\frac{k}{2} \quad\Rightarrow\; -2<-\frac{k}{2}<2 \Rightarrow -4<k<4 \Rightarrow k=-3,-2,-1,0,1,2,3$

$x=-\frac{k}{2}:\{-\frac{3}{2},-1,-\frac{1}{2},0,\frac{1}{2},1,\frac{3}{2}\}$

---

2. $\left[\frac{x}{\sqrt{2}}\right], x\in(0,3)$

$\frac{x}{\sqrt{2}}=k\in z \to x=k\sqrt{2} \to 0<\sqrt{2}k<3 \to k=1,2$

3. $\left[x^2\right] \quad ,x \in (-2,2)$

$x^2 = k \rightarrow x = \pm\sqrt{k} \quad \Rightarrow -\sqrt{3}, -\sqrt{2}, -1, \cancel{0}, +1, \sqrt{2}, \sqrt{3}$

---

4. $\left[\sin(x)\right] \quad x \in (0, 2\pi)$

---

**نجات عامل صفر**

به مثال زیر توجه کنید

پیوستگی توابع $f(x) = [x]$ و $g(x) = (x-2)[x]$ را در $x = 2$ بررسی کنید

$$f(x) = [x] \Rightarrow \lim_{x \to 2^+} f(x) = \left[2^+\right] = 2 \;,\; \lim_{x \to 2^-} f(x) = \left[2^-\right] = 1 \;, f(2) = 2 \;\Rightarrow$$

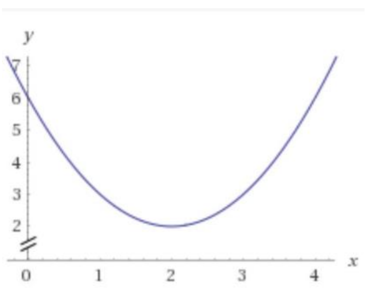
$$g(x) = (x-2)[x] \Rightarrow \lim_{x \to 2^+} g(x) = 0 \times 2 = 0 \;,\; \lim_{x \to 2^-} g(x) = 0 \times 1 = 0 \;,\; g(2) = 0$$

در مورد تابع $g(x)\left[f(x)\right]$ اگر $g(x)$ در نقطه مورد نظر حد و مقدار برابر صفر داشته باشد آنگاه تابع $g(x)\left[f(x)\right]$ در آن نقطه پیوسته هست (حتی اگر درون جزصحیح، صحیح باشد)

خلاصه مفید : عامل صفر کننده پیوسته می تواند با ضرب شدن، تابع ناپیوسته را به پیوسته تبدیل کند و آن را نجات دهد ! **(نجات عامل صفر)**

**مثـال ۵۴)** تابع $\left(x^3 - x\right)[x]$ در بازه $(-3,3)$ چند نقطه ناپیوستگی دارد؟

**مثـال ۵۵)** برای تابع $\left[x^2 - 4x + 6\right]$ پیوستگی را در نقاط ۲ و ۳ بررسی کنید. (از مفهوم صعودی و نزولی بودن هم استفاده کنید)




$$\lim_{x \to 2} f(x) = \lim_{x \to 2} \left[x^2 - 4x + 6\right] = \lim_{x \to 2} \left[(x-2)^2 + 2\right] =$$

$$\left[(\sim 2 - 2)^2 + 2\right] = \left[(\sim 0)^2 + 2\right] = \left[0^+ + 2\right] = \left[2^+\right] = 2$$

$$f(2) = [4 - 8 + 6] = 2$$

$$\lim_{x \to 3^+} f(x) = \lim_{x \to 3^+} \left[(x-2)^2 + 2\right] = \left[(3^+ - 2)^2 + 2\right] = \left[1^+ + 2\right] = 3$$

$$\lim_{x \to 3^-} f(x) = \lim_{x \to 3^-} \left[(x-2)^2 + 2\right] = \left[(3^- - 2)^2 + 2\right] = \left[1^- + 2\right] = 2$$

**تمرین :** برای تابع $\left[-x^2 + 4x + 6\right]$ پیوستگی را در نقاط ۲ و ۳ بررسی کنید.

### ۲-۴ اعمال توابع و پیوستگی

هر چه در خصوص حد داشتن در قسمت های قبلی جزوه در خصوص اعمال توابع و تابع قدرمطلق بیان شد، اینجا هم برقرار است .

از بحث دامنه غافل نشوید ، به مثال زیر دقت کنید

آیا ضرب دو تابع $f(x)=x\,,g(x)=\dfrac{1}{x}$ در مبدا مختصات پیوسته می باشد ؟

$$f.g(x)=1\to Df.g=Df\cap Dg=R-\{0\}$$

**تذکر ۹)** اگر $f$ پیوسته و $g$ ناپیوسته باشد و ضرب این دو، پیوسته باشد، آنگاه $f=0$ باشد (در آن نقطه)

برای فهم بیشتر می توانید به مثال قبل تذکر و همچنین نجات عامل صفر صفحه پیش دقت کنید

**در خصوص تابع قدرمطلق**

**مثال ۵۶)** اگر $f(x)=\begin{cases}-x\sin(x)+a & ;\ x\le\dfrac{\pi}{2}\\ 2+x+\dfrac{a}{\sin(x)} & ;\ x>\dfrac{\pi}{2}\end{cases}$ باشد و خود تابع و قدر مطلق آن به ترتیب در نقطه حساس ناپیوسته و پیوسته باشند آنگاه مقدار $a$ چقدر است ؟

$$A=f(\frac{\pi}{2}^-)=-\frac{\pi}{2}+a\neq f(\frac{\pi}{2}^+)=2+\frac{\pi}{2}+a=B$$

$$|A|=|B|\to A=B,A=-B\ \Rightarrow A=-B\ \Rightarrow\ -\frac{\pi}{2}+a=-2-\frac{\pi}{2}-a\to a=-1$$

**در خصوص جمع و تفریق چند تابع**

ابتدا نقاط مشکل دار هر کدام از توابع را پیدا کنید و سپس در نقاط مشترک بررسی پیوستگی انجام دهید و همچنین کلیه نقاط غیر مشترک، نقاط ناپیوستگی محسوب می شوند.

**مثال ۵۷)** تابع $f(x)=[2x]+[3x]$ در بازه $-1<x<1$ چند نقطه ناپیوستگی دارد؟

$$2x=k\to x=\frac{k}{2}\Rightarrow -\frac{1}{2},0,\frac{1}{2}$$

$$3x=k\to x=\frac{k}{3}\Rightarrow -\frac{2}{3},-\frac{1}{3},0,\frac{1}{3},\frac{2}{3}$$

$$x\to 0^+:f=0\ ,x\to 0^-:f=-2\ \Rightarrow\ \{-\frac{2}{3},-\frac{1}{2},-\frac{1}{3},0,\frac{1}{3},\frac{1}{2},\frac{2}{3}\}$$

یک مورد دیگر در متفرقه

**در خصوص ضرب چند تابع**

بسیار دقت کنید نکته مورد قبلی کار نمی کند . به طور کلی باید در تمام نقاط مشکل دار هر تابع بررسی پیوستگی انجام داد ، اما می توانید از تذکر صفحه قبلی بهره جویید (نجات عامل صفر )

**مثال ۵۸)** تابع $f(x)=\left[\frac{x}{\pi}\right]\sin(x)$ در بازه $-10\le x\le 10$ چند نقطه ناپیوستگی دارد؟

$$\frac{x}{\pi}=k\in\mathbb{Z}\to x=k\pi\to\sin(k\pi)=0\to\ f=0\times(\ldots)=0\to\ =\phi$$

**مثال ۵۹)** تابع $f(x)=\left[\frac{x}{2}\right]\left[\frac{x}{3}\right]$ در بازه $-4<x<4$ چند نقطه ناپیوستگی دارد؟

$$g(x)=\left[\frac{x}{2}\right]\quad \frac{x}{2}=k\to x=2k:\ -2,0,2\qquad ,\ h(x)=\left[\frac{x}{3}\right]\quad \frac{x}{3}=k\to x=3k:\ -3,0,3$$

$$f(0^+)=\left[0^+\right]\left[0^+\right]=0\ ,f(0^-)=\left[0^-\right]\left[0^-\right]=1\ \times$$

$$@x=2\ \ g\times\ ,h:ok\ \ ,h(2)=0\to gh:ok\quad @x=-2\,g\times\ ,h:ok\ \ ,h(-2)=-1\neq 0\to gh:\times$$

$$@x=3or\ \ x=-3\ \ h\times\ ,g:ok\ \ ,g(x)\neq 0\to gh:\times$$

$$\{-3,-2,0,3\}\ \times$$

## ۵-۲ پیوستگی روی بازه های مختلف!

**مقدمه ۱ :** شناخت چند اسم . فرض کنید دامنه یک تابع $[2,6)\cup\{8\}$ باشد :

نقطه مرزی

نقطه درونی

نقطه منفرد

نقطه 6 چه چیزی محسوب می شود ؟

**مقدمه ۲ : این قضیه یک مفهوم جدید نیست و صرفا یک قرارداد است و فقط زمانی از آن استفاده می کنیم که متن سوال پیوسته بودن یا نبودن یک تابع در بازه ای بخصوص باشد و به هیچ عنوان در پاسخگویی به سوال تعداد نقاط ناپیوستگی به این قضیه لعنتی فکر هم نمیکنیم!!**

**تابع f را بر بازه $(a,b)$ پیوسته گوییم هر گاه در هر نقطه ی بازه $(a,b)$ پیوسته باشد**

**تابع f را بر بازه $[a,b]$ پیوسته گوییم هر گاه در هر نقطه ی بازه $(a,b)$ پیوسته باشد و در $x=a$ پیوسته راست و در $x=b$ پیوسته چپ باشد**

**تابع f را بر بازه $(a,b]$ پیوسته گوییم هر گاه در هر نقطه ی بازه $(a,b)$ پیوسته باشد و در $x=b$ پیوسته چپ باشد**

**برای بازه $[a,b)$ خودتان بنویسید !**

**در واقع تمام حرف قضیه پیوستگی روی بازه این است که در نقاط مرزی پیوستگی یک طرفه می خواهیم**

**مثال ۶۰)** یک بازه بسته معرفی کنید که تابع $f(x)=x+\sqrt{4-x^2}$ در آن پیوسته باشد

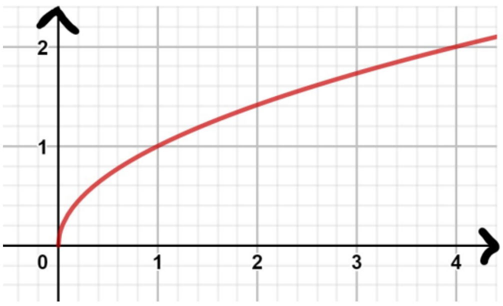
$$f(x)=x+\sqrt{4-x^2} \Rightarrow 4-x^2\geq 0 \Rightarrow -2\leq x\leq 2 \Rightarrow [-2,2]$$

**مثال ۶۱)** اگر تابع $f(x)=[2x]+x$ در بازه $[3,a)$ پیوسته باشد، حداکثر مقدار $a$ چقدر است ؟

اولا باید در ابتدای بازه چون مرزی است پیوستگی راست داشته باشیم که چون درون جزصحیح خط باشیب مثبت است پس صعودی اکید و اوکی ! اما در ۳ ، داخل جزصحیح برابر عدد ۶ می شود و عدد صحیح بعدی ۷ است پس داریم :

**تذکر ۱۰) یک تذکر بسیار مهم:**

تابع $f(x)=\sqrt{x}$ را درنظر بگیرید.




۱- این تابع در $x=0$ پیوسته ......... .

۲- این تابع در بازه $[0,6]$ پیوسته ........ .

۳- تعداد نقاط ناپیوستگی این تابع ......... می باشد.

۴- تعداد نقاط ناپیوستگی تابع در دامنه خود ......... می باشد.

۵- این تابع بر روی بازه $[0,6]$ .......... نقطه ناپیوستگی دارد.

۶- تابع $g(x)=\frac{1}{x}$ چند نقطه ناپیوستگی بر روی دامنه خود دارد؟ (به طور کلی چطور؟)

**+ ضمیمه ویژه رشته ریاضی**

**+ متفرقه اختصاصی برای هر دو رشته ریاضی و تجربی**

**تمارین ۲ صفحه بعدی را حل کنید**

### ۶-۲ تمارین مهم پیوستگی

**مساله ۱:** اگر تابع $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+ax+1}}$ روی R پیوسته باشد حدود $a$ را بدست آورید؟

$x^2+ax+1>0 \to x\in\mathbb{R}:\ \Delta<0 \Rightarrow a^2-4<0 \Rightarrow -2<a<2$

**مساله ۲:** مقدار $f(0)$ را طوری تعیین کنید که تابع $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin(x)}{x} & ;x\neq 0\\ f(0) & ;x=0\end{cases}$ پیوسته باشد؟

$f(0)=\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$

**مساله ۳ :** اگر $\sqrt{3+a\sin(x)}$ روی R پیوسته باشدمقدار $a$ چقدر است؟

**مساله ۴:** حدود a تا تابع $\sqrt{\sin^2(x)-4\sin(x)+a}$ روی R پیوسته باشد؟

$\sin^2(x)-4\sin(x)=(\sin x-2)^2-4 \Rightarrow\ -1\le \sin x\le 1 \Rightarrow -3\le \sin x-2\le -1 \Rightarrow$

$1\le (\sin x-2)^2\le 9 \Rightarrow -3\le (\sin x-2)^2-4\le 5$

$\sin^2(x)-4\sin(x)+a=(\sin x-2)^2-4+a \to a-3\le \sin^2(x)-4\sin(x)+a\le a+5 \to a-3\ge 0: a\ge 3$

**مساله ۵:** اگر $f(x)=\sqrt{-\sin^2\pi x}$ باشد، مجموعه نقاط پیوستگی تابع f کدام است ؟

$-\sin^2\pi x\ge 0 \to -\sin^2\pi x=0 \to x=k\in\mathbb{Z}: D_f$

در نتیجه دامنه تابع فقط شامل نقاط صحیح است و چون همگی منفرد محسوب میشوند در هیچ نقطه ای این تابع پیوسته نیست.

**مساله ۶:** تابع $f(x)=\begin{cases} ax-a+1 & ;x\ge 1\\ [2x] & ;x<1\end{cases}$ بازای کدام مقدار $a$ در $x=1$ پیوسته است ؟

$f(1^+)=f(1^-):\ a-a+1=\left[2^-\right]:1=1 \Rightarrow a\in\mathbb{R}$

بررسی کنید اگر x=1 برای ضابطه پایینی بود نتیجه چه میشد (تهی!)

**مساله ۷:** در تابع $\begin{cases}\dfrac{1}{x} & ;0<x<a\\ 1-\dfrac{x}{4} & ;x\ge a\end{cases}$ مقدار $a$ چقدر باشد تا تابع در تمام نقاط دامنه اش پیوسته باشد.(دقت کنید باید مراقب صفر در بالایی باشد که در دامنه نیست البته)

$@x=a:\ \dfrac{1}{a}=1-\dfrac{a}{4} \to 1=a-\dfrac{a^2}{4} \to a^2-4a+4=0 \to (a-2)^2=0 \to a=2$

**مساله 8:** اگر تابع $f(x)=\left[\sqrt[3]{x}\right]$ در بازه $(27,27+t)$ پیوسته باشد . حداکثر مقدار t کدام است ؟

$f(x)=\left[\sqrt[3]{x}\right] \to \sqrt[3]{x}=k \to x=k^3: 1,8,27,64 \to 27+t=64 \to t=37$

**مساله ۹ :** اگر $f(x)=(x+a)\left[x^2-bx\right]$ در نقاط ۱- و ۲ پیوسته باشد، اعداد طبیعی $a,b$ را بیابید.

چون b طبیعی است پس داخل جزءصحیح صحیح می شود، پس یکی باید با عامل صفر نجات پیدا کند و یکی دیگر با دره سهمی درجه ۲

چون a طبیعی است پس باید عامل صفر باریشه منفی کار کند پس داریم

$$-1+a=0\Rightarrow a=1\,,\,x_s=\frac{-(-b)}{2}=\frac{b}{2}=2\Rightarrow b=4$$

**مساله ۱۰:** اگر تابع $f(x)=(x^3+ax+b)[x]$ در بازه $(0,3)$ نقطه ناپیوستگی نداشته باشد $ab$ چقدر اند؟

$$x=k\in(0,3)\to x=1,2\;:\;(x^3+ax+b)=0\to\begin{cases}1+a+b=0\\8+2a+b=0\end{cases}\to a=-7,b=6\,,\,ab=-42$$

**مساله۱۱:** اگر $f(x)=\begin{cases}1\,;x\ge 7\\2\,;\,x<7\end{cases}\,,\,g(x)=\begin{cases}7\,;x\ge 2\\15\,;\,x<2\end{cases}$ پیوستگی تابع $fog@x=2,\;gof@x=7$ را بررسی کنید. (ج: $fog$ پیوسته هست و $gof$ پیوسته نیست.)

**مساله ۱۲:** اگر $f(x)=\dfrac{1}{a\cos x+3}$ روی $\mathbb{R}$ پیوسته باشد حدود $a$کدام است ؟

$$a\cos x=-3\to\cos x=\frac{-3}{a}:x=\phi\Rightarrow\quad\frac{-3}{a}>1\;\;or\;\;\frac{-3}{a}<-1\Rightarrow$$

$$\left|\frac{-3}{a}\right|>1\Rightarrow\frac{9}{a^2}>1\Rightarrow a^2<9\Rightarrow -3<a<3$$

**مساله ۱۳:** تابع $g(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{|x|-3}\,;x\ge 2\\[2mm]\dfrac{x}{|x|-4}\,;\,x<2\end{cases}$ روی مجموعه اعداد حقیقی در چند نقطه ناپیوسته می باشد؟

$$@x=2:g(2^+)=\frac{1}{2-3}=-1\;\;,\,g(2^-)=\frac{2}{2-4}=-1\;\;ok$$

$$|x|-3=0:x=3,\,x=-3\xrightarrow{\cap x\ge 2}x=3\times$$

$$|x|-4=0:x=4,\,x=-4\xrightarrow{\cap x<2}x=-4\times$$

$$\{-4,3\}\times$$

# 3 متفرقه

## 4 کاردرخانه

## 5 یادداشت

# امیر وفائی

مدرس ریاضیات دوره دوم متوسطه از پایه تا کنکور – متخصص هر دو رشته ریاضی و تجربی

طراح سوالات همه شاخه های ریاضی کانون فرهنگی آموزش (قلمچی)

**رتبه ۲۶ کنکور سراسری**

نفر اول دوره کارشناسی و کارشناسی ارشد مهندسی عمران دانشگاه صنعتی شریف

پذیرفته شده دوره دکتری مستقیم مهندسی عمران دانشگاه صنعتی شریف

رکوردار معدل دانشکده عمران دانشگاه صنعتی شریف از بدو تاسیس تا کنون

کسب عنوان دانشجوی نمونه دانشکده عمران و دانشگاه صنعتی شریف در سال ۱۳۹۴ و ۱۳۹۵

سابقه بیش از ۱۰ ترم استادیاری (دستیار استاد) در دروس مختلف تخصصی و عمومی دانشگاه صنعتی شریف

**گذراندن دوره فرعی رشته ریاضی دانشگاه صنعتی شریف**

**استاد حل تمرین ریاضی دانشگاه صنعتی شریف**

حضور در مدرسه شهیدبشهتی ۱ (تیزهوشان) از سال ۹۲ به عنوان مشاور و مدرس ریاضی

تالیف کتاب تا کنکور با همکاری مدرسه تیزهوشان

مبتکر برنامه های جمعبندی ویژه ۱۰۰-۱۰۰ در همه پایه ها با مشابهت ۱۰۰ درصدی در کنکور سراسری

آموزش مفهومی و متفاوت درس ریاضی منطبق بر برنامه دقیق تدریس و آزمون و برنامه تست

**مدرس رتبه های برتر (تک رقمی و دو رقمی)**

AMIRVAFAEI6

www.Donat.Academy