جزوات آموزش ریاضی

ضمیمه حد و پیوستگی ۱۱

شامل حد مخصوص رشته ریاضی **(اجباری)** و موارد متفرقه رشته ریاضی **(اختیاری)**

ویژه رشته ریاضی

ریاضی را خاص بیاموزید، ۱۰۰٪ مفهومی منطبق بر کنکور سراسری و امتحانات نهایی

www.Donat.Academy

فهرست مطالب

فهرست مطالب ..... أ

۱ حد خاص رشته ریاضی ۱

۱-۱ مقدمه ۱

۱-۲ اصل مطلب ۲

۱-۳ هم ارزی ها! ۴

۱-۴ هم ارزی های درجه ۲ (دقت مرتبه ۲) ۶

۱-۵ چند تمرین ۷

۲ متفرقه ویژه رشته ریاضی ۸

۲-۱ یک مدل خاص، صفر ضربدر بینهایت (اختیاری) ۸

۲-۲ چند مساله دیگر حد (ویژه ریاضی) ۸

۲-۳ چند مساله پیوستگی (ویژه رشته ریاضی) ۱۰

۲-۴ مثالی دیگر از پیوستکی تابع شبه دریکله ویژه رشته ریاضی ۱۱

۲-۵ دو مساله پیوستگی تابع مرکب (ویژه رشته ریاضی) ۱۱

۲-۶ توابع خاص در اعداد صحیح و غیر آن (ویژه علاقه مندان رشته ریاضی) ۱۱

۲-۷ قضیه فشردگی و چند هم ارزی (ویژه ریاضی – اختیاری – مناسب دانشگاه) ۱۲

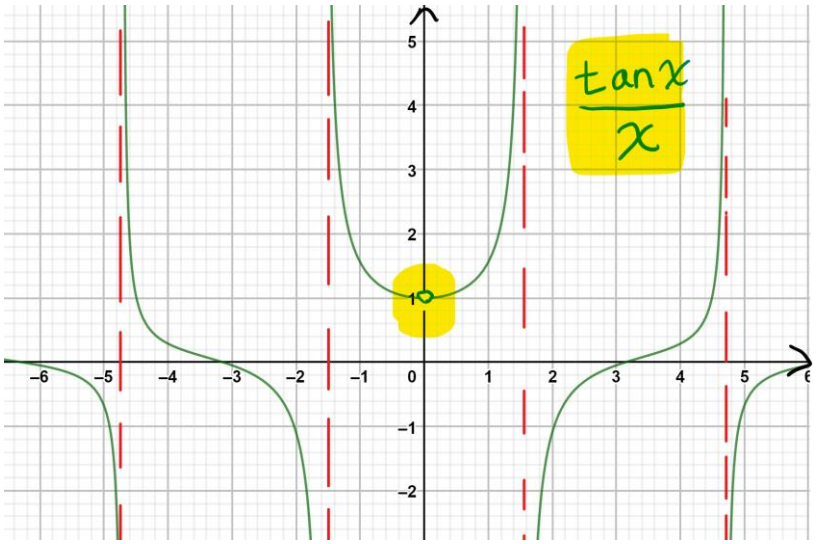
۳ یادداشت ۱۴

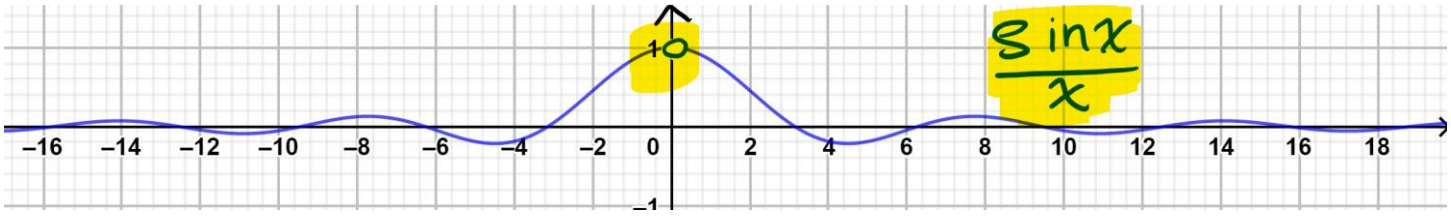
۱ حد خاص رشته ریاضی

۱-۱مقدمه

نشان دهید حد توابع زیر در صفر برابر ۱ می باشد.

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{\tan(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\tan(x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x}=1$$





مثال ۱) حاصل $\lim_{x\to 0}\frac{\sin(ax)}{bx}$ را بدست آورید(bمخالف صفر)

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(ax)}{bx}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin(ax)}{ax}\times\frac{ax}{bx}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin(ax)}{ax}\times\lim_{x\to 0}\frac{ax}{bx}=1\times\frac{a}{b}=\frac{a}{b}$$

تذکر ۱) بدانید واگاه باشید که

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(ax)}{bx}=\lim_{x\to 0}\frac{ax}{\sin(bx)}=\lim_{x\to 0}\frac{\tan(ax)}{bx}=\lim_{x\to 0}\frac{ax}{\tan(bx)}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin(ax)}{\tan(bx)}=\frac{a}{b}$$

حل تستی : هرگاه دیدید کمان جلوی نسبت مثلثاتی سینوس و تانژانت به سمت صفر می رود بیخیال نسبت مثلثاتی شوید و کمان را نگه دارید!!

مثال ۲) حاصل حد $\lim_{x\to 0}\frac{\tan^2(x)-\sin(x)}{3x}$ چقدر است ؟

۱-۲ اصل مطلب

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}$

---

2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan 2x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan 2x}{2x}\times\dfrac{2x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan 2x}{2x}\times\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x}{x}=1\times 2=2$

---

3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{\tan 5x}=\dfrac{3x}{5x}=\dfrac{3}{5}$

---

4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cot 3x}{\cot \pi x}=$

---

5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 5x}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(\sin 5x)^2}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}(\dfrac{\sin 5x}{x})^2=$

$\lim\limits_{x\to 0}(\dfrac{\sin 5x}{5x}\times\dfrac{5x}{x})^2=(1\times 5)^2=25\quad,\ \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 5x}{x^2}=\dfrac{(5x)^2}{x^2}=25$

---

6) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan 5x+\sin 7x}{x^2+x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5x+7x}{x(x+1)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{12x}{x(x+1)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{12}{(x+1)}=12$

---

7) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sin(x-2)}{x^2-4}=\dfrac{(x-2)}{(x-2)(x+2)}=\dfrac{1}{4}$

$x-2=t\to 0\ :\ \lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sin(x-2)}{x^2-4}=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\sin t}{(t+2)^2-4}=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\sin t}{t^2+4t}=$

$\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\sin t}{t(t+4)}=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\sin t}{t}\times\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{1}{(t+4)}=1\times\dfrac{1}{4}=\dfrac{1}{4}$

---

8) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\sin x-\cos x}{x-\frac{\pi}{4}}$

---

9) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos^2 x}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+\cos x)(1-\cos x)}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+\cos x)(2\sin^2\frac{x}{2})}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2(1+\cos x)}{1}(\dfrac{\sin\frac{x}{2}}{x})^2$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2(1+\cos x)}{1}(\dfrac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\times\dfrac{\frac{x}{2}}{x})^2=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2(1+\cos x)}{1}\times\lim\limits_{x\to 0}(\dfrac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\times\dfrac{\frac{x}{2}}{x})^2=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2(1+\cos x)}{1}\times\dfrac{1}{4}(\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}})^2=1$

---

10) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 3x-\cos 5x}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1-\cos 5x)-(1-\cos 3x)}{x^2}=$

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin^2(\frac{5x}{2})-2\sin^2(\frac{3x}{2})}{x^2}=\dfrac{2\frac{25x^2}{4}-2\frac{9x^2}{4}}{x^2}=\dfrac{25}{2}-\dfrac{9}{2}=8$

13) $\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3}$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin x}{\cos x}-\sin x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin x}{\cos x}-\frac{\sin x\cos x}{\cos x}}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x(1-\cos x)}{x^3\cos x}=$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x(2\sin^2\frac{x}{2})}{x^3\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{x(2\frac{x^2}{4})}{x^3\cos x}=\frac{1}{2}$$

---

15) $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{x-\frac{\pi}{2}}\Rightarrow x-\frac{\pi}{2}=t\to 0\ ,\ x=\frac{\pi}{2}+t\Rightarrow\lim_{t\to 0}\frac{\cos(\frac{\pi}{2}+t)}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{-\sin t}{t}=-1$

---

16) $\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{\sin(x-\frac{\pi}{3})}{6x-2\pi}$

---

17) $\lim_{x\to\pi^+}\frac{\sqrt{1+\cos x}}{\sin x}=\lim_{x\to\pi^+}\frac{\sqrt{2\cos^2\frac{x}{2}}}{\sin x}=\lim_{x\to\pi^+}\frac{\sqrt{2}\left|\cos\frac{x}{2}\right|}{\sin x}$

$x\to\pi^+:\frac{x}{2}>\frac{\pi}{2}\ :\cos\frac{x}{2}<0\ :\left|\cos\frac{x}{2}\right|=-\cos\frac{x}{2}$

$$\lim_{x\to\pi^+}\frac{\sqrt{2}\left|\cos\frac{x}{2}\right|}{\sin x}=\lim_{x\to\pi^+}\frac{-\sqrt{2}\cos\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}=\lim_{x\to\pi^+}\frac{-\sqrt{2}}{2\sin\frac{x}{2}}=\frac{-\sqrt{2}}{2}$$

---

18) $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos 3x}{\cos 5x}$

در موارد که متغییر به سمت صفر نمی رود و هم ارزی هم نمی توان استفاده کرد
براحتی ، تغییر متغیر جواب است! **مورد ۱۵+ ۱۸**

مورد ۱۱ و ۱۲ و ۱۹ در متفرقه + مورد ۱۴ بعد ها !

۱-۳ هم ارزی ها!

در حل سوالات حد بعضاً روش قبلی که بر مبنای ساده سازی بود کاری دشوار و وقت‌گیر است، در این قسمت توابعی را معرفی می‌کنیم که می‌توانند نقش توابع مادر خود را حول و حوش صفر بازی کنند.(یعنی تقریبی از تابع مادر خود می باشند) این مورد روند حدگیری را می‌تواند بسیار ساده کند البته اگر درست و بجا استفاده گردد. اگر $A \to 0$ داریم:

$$\cos(A) \sim 1-\frac{A^2}{2} \qquad 1-\cos(A) \sim \frac{A^2}{2}$$

$$\cos^m(A) \sim 1-m\frac{A^2}{2} \qquad 1-\cos^m(A) \sim m\frac{A^2}{2}$$

$$\sin(A) \sim A \qquad \tan(A) \sim A$$

$$(1+A)^m \sim 1+mA \quad OR \quad \sqrt[n]{1+A} \sim 1+\frac{A}{n}$$

$$f(x)=a_n x^n+\ldots+a_1 x+a_0 : x \to 0 : f \to a_0$$

$$f=x^3+x^2+2x : x \to 0 : f \to x(2+x+x^2)=x(2+0+0)=2x$$

مثـال ۳) موارد زیر را این دفعه از طریق هم ارزی حل کنید.

$$1)\ \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(x)}{x\tan(x)}=\frac{0}{0} \sim \lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^2}{2}}{x(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^2}{2}}{x^2}=\frac{1}{2}$$

$$2)\ \lim_{x\to a}\frac{\sin(\frac{x-a}{2})}{x-a}=\frac{0}{0} \sim \lim_{x\to a}\frac{\frac{x-a}{2}}{x-a}=\frac{1}{2}$$

$$3)\ \lim_{x\to 0}\frac{\cos(2x)-\cos(6x)}{x\tan(x)}=\frac{0}{0} \sim \lim_{x\to 0}\frac{(1-\frac{(2x)^2}{2})-(1-\frac{(6x)^2}{2})}{x(x)} =$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1-2x^2)-(1-18x^2)}{x(x)}=\frac{16x^2}{x^2}=16$$

$$4)\ \lim_{x\to 0}\frac{x(\sin(5x)-\sin(3x))}{1-\cos(6x)}$$

5) $\lim\limits_{x\to\pi^+}\dfrac{\sin x-\sqrt{1-\cos 2x}}{x-\pi}$ $x-\pi=t\to 0^+$,$x=\pi+t\Rightarrow \lim\limits_{t\to 0^+}\dfrac{\sin(\pi+t)-\sqrt{1-\cos(2\pi+2t)}}{t}=$

$\lim\limits_{t\to 0^+}\dfrac{-\sin t-\sqrt{1-\cos(2t)}}{t}=\lim\limits_{t\to 0^+}\dfrac{-\sin t-\sqrt{2\sin^2 t}}{t}=\lim\limits_{t\to 0^+}\dfrac{-t-\sqrt{2t^2}}{t}=\dfrac{-t-\sqrt{2}t}{t}=-1-\sqrt{2}$

---

6) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan(5x)-\tan(3x)-\tan(2x)}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan(5x)+\tan(-3x)+\tan(-2x)}{x^3}\Rightarrow (5x)+(-3x)+(-2x)=0$

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan(5x)\tan(-3x)\tan(-2x)}{x^3}=\dfrac{0}{0}\sim\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(5x)(-3x)(-2x)}{x^3}=\dfrac{30x^3}{x^3}=30$

چند مساله بسیار مهم از کتاب درسی

1) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sin(x)-\sin(a)}{x-a}$: $x-a=t\to 0$, $x=a+t\Rightarrow$

$\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\sin(a+t)-\sin(a)}{t}=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\sin a\cos t+\sin t\cos a-\sin a}{t}$

$\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\sin a(\cos t-1)+\sin t\cos a}{t}=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\sin a(-2\sin^2\frac{t}{2})}{t}+\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\sin t\cos a}{t}=$

$-2\sin a\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\frac{t^2}{4}}{t}+\cos a\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\sin t}{t}=0+\cos a$

---

2) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\cos(x+\frac{\pi}{4})}{\cos x-\sin x}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\cos x\cos\frac{\pi}{4}-\sin x\sin\frac{\pi}{4}}{\cos x-\sin x}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos x-\sin x)}{\cos x-\sin x}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

---

3) $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{x^2}{|1-\cos x|}$

---

4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{\cos(x)}-\sqrt{\cos(2x)}}{1-\cos(x)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1-\frac{x^2}{2}\frac{1}{3})-(1-2x^2\frac{1}{2})}{\frac{x^2}{2}}=\dfrac{x^2(1-\frac{1}{6})}{\frac{x^2}{2}}=\dfrac{\frac{5}{6}}{\frac{1}{2}}=\dfrac{5}{3}$

۱-٤ هم ارزی های درجه ۲ (دقت مرتبه ۲)

هر وقت از هم ارزی استفاده کردید و به **(حسن) - (حسن)** برخوردید، بدانید که دقتتان کافی نبود و هم ارزی های یک مرتبه دقیق تر : مرتبه (درجه) ۲ :

$$\sin(A)\sim A-\frac{A^3}{6} \quad : \quad A-\sin(A)\sim\frac{A^3}{6}$$

$$\tan(A)\sim A+\frac{A^3}{3} \quad : \quad A-\tan(A)\sim-\frac{A^3}{3}$$

$$\sin(A)-\tan(A)\sim-\frac{A^3}{2} \qquad ?: \ \sin(A)-\tan(A)=(A-\frac{A^3}{6})-(A+\frac{A^3}{3})=-\frac{A^3}{6}-\frac{A^3}{3}=-\frac{A^3}{2}$$

مثـال ٤) حاصل حدود زیر را بدست آورید

$$1)\ \lim_{x\to0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3}=\frac{x-x}{x^3}\ !!$$

$$\lim_{x\to0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3}\sim\lim_{x\to0}\frac{\frac{x^3}{2}}{x^3}=\frac{1}{2}$$

$$2)\ \lim_{x\to0}\frac{\sin3x-3\sin x}{x^3}=\frac{3x-3x}{.....}\ !!$$

$$I)\ \lim_{x\to0}\frac{\sin3x-3\sin x}{x^3}=\lim_{x\to0}\frac{3\sin x-4\sin^3x-3\sin x}{x^3}=-4\lim_{x\to0}(\frac{\sin x}{x})^3=-4$$

$$II)\ \lim_{x\to0}\frac{\sin3x-3\sin x}{x^3}=\lim_{x\to0}\frac{(3x-\frac{27x^3}{6})-3(x-\frac{x^3}{6})}{x^3}=\frac{3x-4.5x^3-3x+0.5x^3}{x^3}=\frac{-4x^3}{x^3}=-4$$

کی درجه ۱ کی درجه ۲؟ (اختیاری)

۱- ابتدا دقت کنید بعد از درجه ۱ اگر به عبارت **(x-x)** برخوردید، صفر مطلق نگیرید و بهتر است که درجه ۲ بزنید!

۲- در توابع جبری- مثلثاتی عموما درجه ۲ جواب درست می‌دهد.

۳- در یک عبارت جمع و تفریقی باید همه را با یک دقت واحد بنویسید !

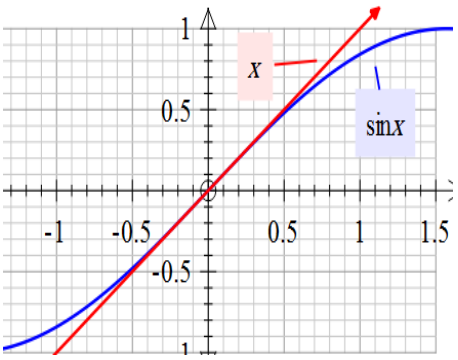
مثـال ٥) **(اختیاری)** حاصل حد $\lim_{x\to\circ}\frac{x-\cos(x)\sin(x)}{xtg(x^2)}$ را بدست آورید

حل غ :
$$\lim_{x\to\circ}\frac{x-\cos(x)\sin(x)}{xtg(x^2)}=\frac{x-\cos(x)\times x}{x^3}=\frac{x(1-\cos x)}{x^3}=\frac{x(\frac{x^2}{2})}{x^3}=\frac{1}{2}$$

حل درست:
$$\sim\frac{x-(1-\frac{x^2}{2})(x-\frac{x^3}{6})}{x^3}=\frac{x-x+\frac{x^3}{2}+\frac{x^3}{6}-\frac{x^5}{12}}{x^3}=\frac{\frac{4x^3}{6}-\frac{x^5}{12}}{x^3}=\frac{4}{6}-\frac{x^2}{12}=\frac{2}{3}$$

۱-۵ چند تمرین

مثال ۶) حدود مهم زیر را محاسبه نمائید.



$$1)\ \lim_{x\to 0}\left[\frac{\sin(x)}{x}\right]=0 \qquad 2)\left[\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x}\right]=1$$

$$x\succ 0: x\succ \sin x \to \frac{x}{x}=1\succ \frac{\sin x}{x}$$

$$x\prec 0: x\prec \sin x \to \frac{x}{x}=1\succ \frac{\sin x}{x}$$

$$\Rightarrow \left[1^{-}\right]=0$$

مثال ۷) حاصل حد زیر را بدست آورید

$$\lim_{x\to 0}\frac{2x-\sin(x)-tg(x)}{x-\sin(x)}=\frac{(x-\sin x)+(x-\tan x)}{(x-\sin x)}=\frac{\frac{x^3}{6}-\frac{x^3}{3}}{\frac{x^3}{6}}=\frac{\frac{1}{6}-\frac{1}{3}}{\frac{1}{6}}=-1$$

۲ متفرقه ویژه رشته ریاضی

۲-۱ یک مدل خاص، صفر ضربدر بینهایت (اختیاری)

$$1)\ \lim_{x\to 1}(1-x)\tan\frac{\pi x}{2} \quad = 0\times\infty$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{(1-x)}{\frac{1}{\tan\frac{\pi x}{2}}}=\lim_{x\to 1}\frac{1-x}{\cot\frac{\pi x}{2}}=\lim_{x\to 1}\frac{1-x}{\tan(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi x}{2})}=\lim_{x\to 1}\frac{1-x}{\tan\frac{\pi}{2}(1-x)}\sim\frac{1-x}{\frac{\pi}{2}(1-x)}=\frac{2}{\pi}$$

– –

$$2)\ \lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\cot 2x\ \tan(x+\frac{\pi}{4})$$

۲-۲ چند مساله دیگر حد (ویژه ریاضی)

$$11)\ \lim_{x\to 0}\frac{1-\sqrt[3]{\cos 2x}}{x^2}=\frac{0}{0}\sim\lim_{x\to 0}\frac{1-(1-\frac{1}{3}\frac{(2x)^2}{2})}{x^2}=\frac{\frac{2}{3}x^2}{x^2}=\frac{2}{3}$$

– –

$$12)\ \lim_{x\to\infty}x^2(1-\cos\frac{1}{x})\quad \frac{1}{x}=t\to 0\quad x^2=\frac{1}{t^2}\Rightarrow\lim_{t\to 0}\frac{1}{t^2}(1-\cos t)=\lim_{t\to 0}\frac{1-\cos t}{t^2}=\frac{\frac{t^2}{2}}{t^2}=\frac{1}{2}$$

– –

$$19)\ \lim_{x\to\pi}\frac{1+\cos x}{(x-\pi)^2}\quad \Rightarrow x-\pi=t\to 0\ ,\ x=\pi+t:\ \cos(x)=\cos(\pi+t)=-\cos t$$

$$\lim_{x\to\pi}\frac{1+\cos x}{(x-\pi)^2}=\lim_{t\to 0}\frac{1-\cos t}{(t)^2}=\frac{\frac{t^2}{2}}{t^2}=\frac{1}{2}$$

– –

$$b)\ \lim_{x\to 0}\frac{(1+4x)^3-(1+3x)^4}{2x^2}=\sim\lim_{x\to 0}\frac{(1+4x(3))-(1+3x(4))}{2x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{(1+12x)-(1+12x)}{2x^2}=0\ \times\ !!!!!$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+\binom{3}{1}(4x)+\binom{3}{2}(4x)^2+\binom{3}{3}(4x)^3)-(1+\binom{4}{1}(3x)+\binom{4}{2}(3x)^2+\binom{4}{3}(3x)^3+\binom{4}{4}(3x)^4)}{2x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(1+12x+48x^2+\alpha x^3)-(1+12x+54x^2+\beta x^3+\lambda x^4)}{2x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{-6x^2+\ldots x^3+\ldots x^4}{2x^2}\sim\frac{-6x^2}{2x^2}=-3$$

یک سوال دیگر از هم ارزی مرتبه ۲ !

$$1)\lim_{x\to 0}\frac{2x\cos(x)-\sin(2x)}{x^3}$$

2) $\lim\limits_{x\to\pi^+}\dfrac{\sin(\frac{x}{4})\sin(\pi\sin(x))}{\sqrt{1+\cos(x)}}$

$= \lim\limits_{x\to\pi^+} \dfrac{\sin(\frac{x}{4})\,\pi\sin x}{\sqrt{2\cos^2(\frac{x}{2})}} \dfrac{\cos(\frac{\pi}{2})^+}{0} \lim\limits_{x\to\pi} \dfrac{2\pi\sin\frac{x}{4}\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{-\sqrt{2}\cos\frac{x}{2}}$

$= -\sqrt{2}\pi\sin\frac{x}{4}\sin\frac{x}{2} = -\sqrt{2}\pi\frac{\sqrt{2}}{2}(1) = -\pi$

---

3) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{(\sqrt{2}\cos(x)-\sin(10x))}{\sin(3x)+\cos(3x)}$

$x-\frac{\pi}{4}=t\to 0 \;,\; x=t+\frac{\pi}{4}$

$= \sqrt{2}\sin(x+\frac{\pi}{4})$

$\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{(\sqrt{2}\cos(t+\frac{\pi}{4})-\sin(10t+10\frac{\pi}{4}))}{\sqrt{2}\sin(3t+3\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4})} = \lim\limits_{t\to 0}\dfrac{(\cos t-\sin t)-\cos 10t}{-\sqrt{2}\sin(3t)}$

$\dfrac{1-t^2/2-t-1+5t^2}{-3\sqrt{2}t} = \dfrac{1}{3\sqrt{2}}+(\dots)t \xrightarrow{t\to 0} \dfrac{1}{3\sqrt{2}}$

---

4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1+a\cos x+b\sin x}{x}=2\to a+b=?$

---

5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^m x}{x^3\tan 2x}=\dfrac{1}{2}\to m=?$

$\dfrac{x^m}{2x^4}=\dfrac{1}{2}\Rightarrow m=4$

---

6) $I:\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt[3]{\cos x}}{1-\cos\sqrt[3]{x}}=0$ $\quad II:\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{\cos 2x}-\sqrt{\cos 4x}}{1-\sqrt{\cos x}}=12$ $\quad III:\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x\cos 3x-1}{\sqrt{x^2+4}-2}=-20$

۲-۳ چند مساله پیوستگی (ویژه رشته ریاضی)

مثال ۶۴: پیوستگی را در نقطه حساس تابع $f(x)=\begin{cases}\frac{\sqrt{\cos^2(x)}}{\sin(2x)} & x\neq\frac{\pi}{2}\\ 0/5 & x=\frac{\pi}{2}\end{cases}$ بررسی نمائید.

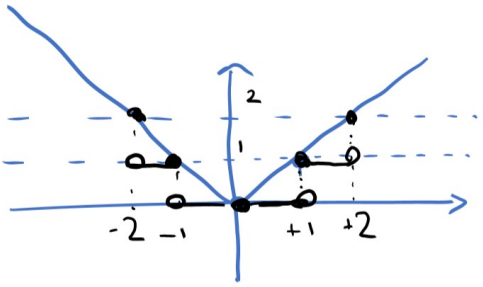
$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sqrt{\cos^2 x}}{\sin 2x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{|\cos x|}{2\sin x\cos x}$

$\frac{\pi}{2}^+ \Rightarrow \frac{-1}{2\sin x}=-\frac{1}{2}$

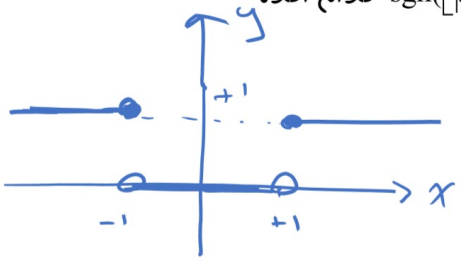
$\frac{\pi}{2}^- \Rightarrow \frac{1}{2\sin x}=\frac{1}{2}$

$\Rightarrow \neq$ ✗

مثال ۶۴: نقاط ناپیوستگی $\operatorname{sgn}(\lfloor|x|\rfloor)$ کدام اند؟



$\operatorname{sgn}(x)=\begin{cases}+1 & x>0\\ 0 & x=0\\ -1 & x<0\end{cases}$



$\Rightarrow \{\pm 1\}$

مثال: پیوستگی تابع مقابل را بررسی کنید $u(f),\ f=\begin{cases}x^3+6x^2+9x+4; & x\le 1\\ [2x+1]; & x>1\end{cases}$

$u(x)=\begin{cases}1 & x\ge 0\\ 0 & x<0\end{cases}$ $\quad f(x)=\begin{cases}(x+1)^2(x+4) & x\le 1\\ [2x]+1 & x>1\end{cases}$

$x>1 \to f=[2x]+1>0 \Rightarrow u(f)=1$

$x\le 1 \to f(x)=(x+1)^2(x+4)$ ⟨ $-4<x\le 1$ ⟹ $f\ge 0 \to u=1$; $x<-4$ ⟹ $f<0 \to u=0$

$\to u(f)=\begin{cases}1 & x\ge -4\\ 0 & x<-4\end{cases}$

$\Rightarrow \mathbb{R}-\{-4\}$

مثال: اگر تابع $f=\begin{cases}\frac{\sqrt[3]{1+12x}-1}{\sin 2x}; & x\neq 0\\ b; & x=0\end{cases}$ در $x=0$ پیوسته باشد، مقدار b چقدر است؟

* برعولی *

$\frac{(1+12x)^{\frac{1}{3}}-1}{2x}=\frac{1+\frac{1}{3}(12x)-1}{2x}=\frac{4x}{2x}=2$

$\to \boxed{b=2}$

$b=f(0)$

$2=\lim_{x\to 0} f(x)$

۲-٤ مثالی دیگر از پیوستگی تابع شبه دریکله ویژه رشته ریاضی

$$f_2(x)=\begin{cases}\left[x+\frac{1}{3}\right]+1 & x\in\mathbb{Q}\\ [x]-[-x] & x\notin\mathbb{Q}\end{cases} \quad @x=\pm\frac{1}{2}$$

$x=\frac{1}{2} \to f(\frac{1}{2}) \overset{Q}{=} [\frac{1}{2}+\frac{1}{3}]+1 = 0+1=1$

$x\to\frac{1}{2}^+ \begin{cases}\in Q = 0+1=1\\ \notin Q = [\frac{1}{2}^+]-[(\frac{1}{2})^-] = 0-(-1)=1\end{cases}$

$x\to\frac{1}{2}^- \begin{cases}\in Q = 0+1=1\\ \notin Q = 0-(-1)=1\end{cases} \to 1=1=1$ ✓

۲-۵ دو مساله پیوستگی تابع مرکب (ویژه رشته ریاضی)

3. $f(x)=\begin{cases}10-2x & ,x\notin\mathbb{Q}\\ x & ,x\in\mathbb{Q}\end{cases}$, $f(x), fof(x)@x=1$

$f(x): x\to 1: \begin{cases}\in Q = 1\\ \notin Q = 10-2=8\end{cases}$

$1\neq 8$ ✗

$fof(x) \to$ (I) $x\in Q \to f(x)=x \to \in Q \to fof(x)=f(x)=x$

$\to$ (II) $x\notin Q \to f(x)=10-2x \to \notin Q \to fof(x)=10-2(10-2x)$

$=10-20+4x=4x-10 \Rightarrow fof(x)=\begin{cases}x & x\in Q\\ 4x-10 & x\notin Q\end{cases} \Rightarrow x=1 \Rightarrow \begin{cases}1\\ -6\end{cases}$ ✗

---

4. $f(x)=\begin{cases}6-x & ,x\notin\mathbb{Q}\\ x & ,x\in\mathbb{Q}\end{cases}$, $f(x), fof(x)@x=3$

۲-٦ توابع خاص در اعداد صحیح و غیر آن (ویژه علاقه مندان رشته ریاضی)

$$f(x)=\begin{cases}g(x) & x\in\mathbb{Z}\\ h(x) & x\notin\mathbb{Z}\end{cases}$$

۱) اگر h پیوسته باشد در تمام نقاط غیرصحیح تابع پیوسته می باشد. و همچنین نقاط ناپیوستگی h نقاط ناپیوستگی f نیز هست.

۲) تابع در نقاط صحیح وقتی پیوسته هست که $\lim_{x\to k} h(x) = g(k)$

۳) اگر h روی $\mathbb{Z}$ پیوسته باشد ریشه های صحیح معادله $g = h$ نقاط پیوستگی صحیح تابع f را تشکیل می دهند.

مثال ۷۷-الف:

$$f1(x) = \begin{cases} x(x-2)(x-0/5) & x \in \mathbb{Z} \\ 0 = h & x \notin \mathbb{Z} \end{cases}$$

h روی $\mathbb{Z}$ پیوسته است.

$x(x-2)(x-\frac{1}{2}) = 0$

$\hookrightarrow x = 0, 2, \frac{1}{2}$ ← $x = 0, 2$ ✓

در سایر نقاط صحیح پیوسته نیست.

$$f2(x) = \begin{cases} 3x^3 - 5x^2 - 8x & x \in \mathbb{Z} \\ 0 & x \notin \mathbb{Z} \end{cases} \quad @x \in \mathbb{Z}$$

$$f3(x) = \begin{cases} x & x \in \mathbb{Z} \\ x^2 & x \notin \mathbb{Z} \end{cases} \quad @x \in (-2,2)$$

$$f4(x) = \begin{cases} x(x-2) & x \in \mathbb{Z} \\ [x] = h & x \notin \mathbb{Z} \end{cases}$$

$k \leftarrow$

$x \notin \mathbb{Z} \leftarrow h(x)$ ← روی این نقاط پیوسته

$x \in \mathbb{Z} \leftarrow$ حد h و مقدار k

$[x]$ در هیچ نقطه صحیحی حد ندارد ←

$$f5(x) = \begin{cases} 3a-1 & x \in \mathbb{Z} \\ a[x] + b[-x] & x \notin \mathbb{Z} \end{cases}$$

→ روی $\mathbb{R}$ پیوسته باشه ← $a+b=3$

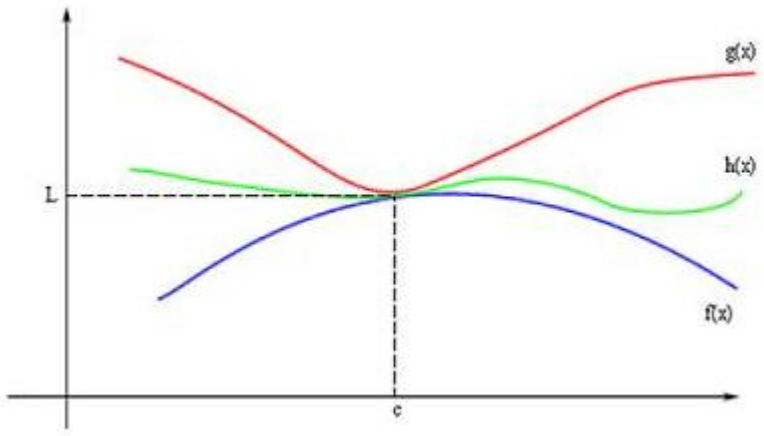
۲-۷ قضیه فشردگی و چند هم ارزی (ویژه ریاضی – اختیاری – مناسب دانشگاه)

۱. قضیه فشردگی یا ساندویچ: اگر در یک همسایگی محذوف نقطه a تابع های f و g و h در رابطه $h(x) \le f(x) \le g(x)$ صدق کنند و همچنین بدانیم

$$\lim_{x\to a} h(x) = \lim_{x\to a} g(x) = L$$

آنگاه خواهیم داشت:

$$\lim_{x\to a} f(x) = L \quad \{a \text{ can be } num - num^{+} - num^{-} - \infty\}$$



مثال مهم : با استفاده از قضیه فشردگی حاصل حد $x\sin(\frac{1}{x})$ را در صفر بیابید.

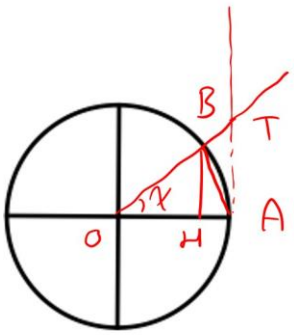
$x \to 0^+$: $-x \le x\sin\frac{1}{x} \le x \Rightarrow$ حد $= 0$

$x \to 0^-$: $x \le x\sin\frac{1}{x} \le -x \Rightarrow$ حد $= 0$

حد راست = حد چپ $= 0$

مثال اگر در مجاورت $x=1$ داشته باشیم $x^2+2x \le f(x) \le 2x^2+1$ حاصل $\lim_{x\to 1}(f(x)+3x)$ ؟

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{x}{\tan(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{\tan(x)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x} = 1$$



$S_{OBA} \le S_{OBA} \le S_{OTA}$

$\frac{1}{2}\sin x < \frac{1}{2}x < \frac{1}{2}\tan x$ } $x > 0$

$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}$

$\lim_{x\to 0^+}\frac{x}{\sin x} = 1$ ← متقارن

$\frac{x}{\sin x} \to 1 \quad (x \to 0)$ ← برای $x \to 0^-$ هم

دیگر هم ارزی های مناسب دانشگاه :

$$e^A \sim 1+A \quad , \quad \frac{1}{A+1} \sim 1-A$$

$$Ln(1+A) \sim A \quad , \quad A - Ln(1+A) \sim \frac{A^2}{2}$$

$$\lim_{n\to\infty} 1^p + 2^p + 3^p + \ldots + n^p = \frac{n^{p+1}}{p+1}$$

۳ یادداشت