

جزوات آموزش ریاضی

ضمیمه مثلثات ۱۱

شامل روابط بیشتر رشته ریاضی و موارد متفرقه رشته ریاضی

ویژه رشته ریاضی



وَالِه

آموزش تخصصی ریاضیات

ریاضی را خاص بیاموزید، ۱۰۰٪ مفهومی منطبق بر کنکور سراسری و امتحانات نهایی



فهرست مطالب

فهرست مطالب أ

۱ ضمیمه رشته ریاضی - روابط مثلثاتی بیشتر ۱

۱-۱ نتایج بسط‌های جمع و تفاضل ۱

۱-۲ مثال ها ۲

۱-۳ یک سری مثال خوفناک ۴

۱-۴ روابط اختیاری ۵

۱-۴-۱ سه برابر کمان ۵

۱-۴-۲ روابط تکمیلی (اختیاری در منزل) ۶

۲ متفرقه ۸

۲-۱ از روابط یازدهم رشته ریاضی ۸

۲-۱-۱ یک سری اثباتی ها ۸

۲-۱-۲ یک مثال خفن و یک فرمول جالب ۹

۲-۱-۳ روابط جمع به ضرب و ضرب به جمع ۱۰

۲-۱-۴ دیگر مسائل ویژه پایه یازدهم رشته ریاضی ۱۲

۲-۱-۵ پنج مساله کاربردی مثلث ویژه یازدهم ریاضی ۱۴

۳ یادداشت ۱۶

۱ ضمیمه رشته ریاضی - روابط مثلثاتی بیشتر

۱-۱ انتایج بسط‌های جمع و تفاضل

.I

$$1. \sin(a+b)\sin(a-b) = \cos^2(b) - \cos^2(a) = \sin^2(a) - \sin^2(b)$$

$$2. \cos(a+b)\cos(a-b) = \cos^2(b) - \sin^2(a) = \cos^2(a) - \sin^2(b)$$

$$3. \sin(a+b)\cos(a-b) = \sin a \cos a + \sin b \cos b$$

$$4. \cos(a+b)\sin(a-b) = \sin a \cos a - \sin b \cos b$$

$$1: (\sin a \cos b + \sin b \cos a)(\sin a \cos b - \sin b \cos a) = \sin^2 a \cos^2 b - \sin^2 b \cos^2 a$$

$$= \begin{cases} \sin^2 a (1 - \sin^2 b) - \sin^2 b (1 - \sin^2 a) = \sin^2 a - \sin^2 b \\ (1 - \cos^2 a) \cos^2 b - (1 - \cos^2 b) \cos^2 a = \cos^2 b - \cos^2 a \end{cases}$$

$$3: (\sin a \cos b + \sin b \cos a)(\cos a \cos b + \sin b \sin a) =$$

$$\sin a \cos a \cos^2 b + \sin^2 a \sin b \cos b + \cos^2 a \sin b \cos b + \sin^2 b \sin a \cos a =$$

$$= \sin a \sin b (\sin^2 b + \cos^2 b) + \sin b \cos b (\sin^2 a + \cos^2 a) = \sin a \sin b + \sin b \cos b$$

.II

$$5. \tan(x + \frac{\pi}{4}) = \frac{1 + \tan(x)}{1 - \tan(x)} = \frac{\cos(x) + \sin(x)}{\cos(x) - \sin(x)}$$

$$6. \tan(x - \frac{\pi}{4}) = \frac{\tan(x) - 1}{1 + \tan(x)} = \frac{\sin(x) - \cos(x)}{\sin(x) + \cos(x)}$$

$$\cot(x + \frac{\pi}{4}) = \frac{\cot(x) - 1}{\cot(x) + 1}$$

$$\cot(x - \frac{\pi}{4}) = \frac{\cot(x) + 1}{1 - \cot(x)}$$

$$5: \tan(x + \frac{\pi}{4}) = \frac{\tan(x) + \tan \frac{\pi}{4}}{1 - \tan(x) \tan \frac{\pi}{4}} = \frac{1 + \tan(x)}{1 - \tan(x)} = \frac{1 + \frac{\sin x}{\cos x}}{1 - \frac{\sin x}{\cos x}} = \frac{\frac{\cos x + \sin x}{\cos x}}{\frac{\cos x - \sin x}{\cos x}} = \frac{\cos(x) + \sin(x)}{\cos(x) - \sin(x)}$$

.III

$$7. \sin(x) + \cos(x) = \sqrt{2} \sin(x + \frac{\pi}{4}) = \sqrt{2} \cos(x - \frac{\pi}{4})$$

$$8. \sin(x) - \cos(x) = \sqrt{2} \sin(x - \frac{\pi}{4}) = -\sqrt{2} \cos(x + \frac{\pi}{4})$$

$$\sqrt{2} \cos(x - \frac{\pi}{4}) = \sqrt{2} (\cos x \cos \frac{\pi}{4} + \sin x \sin \frac{\pi}{4}) = \sqrt{2} (\cos x \frac{\sqrt{2}}{2} + \sin x \frac{\sqrt{2}}{2}) = \sin(x) + \cos(x)$$

.IV

$$\tan(x + y) = k, \quad \tan(x - y) = L$$

$$\tan(2x) = \frac{K + L}{1 - K L}, \quad \tan(2y) = \frac{K - L}{1 + K L}$$

$$\tan(x + y) = k \rightarrow \tan(x) + \tan(y) + k \tan(x) \tan(y) = k$$

۱-۲ مثال‌ها

مثال ۱ اگر داشته باشیم $\tan(y) = \sqrt{2} + 1$, $\tan(x) = \sqrt{2} - 1$ ، زاویه $(y - x)$ را مشخص کنید.

$$\tan(y - x) = \frac{\tan y - \tan x}{1 + \tan x \tan y} = \frac{2}{1 + 2 - 1} = 1 \rightarrow y - x = \frac{\pi}{4}$$

مثال ۲ عبارت $tg(12) + tg(33) + tg(12)tg(33)$ را ساده کنید

در این سبک سوال‌ها فرمول تانژانت مجموع دو زاویه داده شده را باز کنید، روال همیشه!

مثال ۳ حاصل عبارت $\frac{\sin(x) + \cos(x)}{\sin(x) - \cos(x)}$ را به ازای $x = \frac{\pi}{12}$ بدست آورید

$$\frac{\sin(x) + \cos(x)}{\sin(x) - \cos(x)} = \frac{\sqrt{2} \sin(45+x)}{\sqrt{2} \sin(45-x)} = \frac{\sin(45+15)}{\sin(45-15)}$$

مثال ۴ حداقل و حداکثر عبارت $\sin x + \sqrt{3} \cos x$ را بیابید.

در مواردی که در مساله $a \sin x + b \cos x$ مطرح شده است کافیه از $\sqrt{a^2 + b^2}$ فاکتور بگیری!

$$A = a \sin x + b \cos x = \sqrt{a^2 + b^2} \left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \sin x + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cos x \right)$$

$$\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \cos \alpha \Leftrightarrow \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \sin \alpha$$

$$A = \sqrt{a^2 + b^2} (\sin x \cos \alpha + \cos x \sin \alpha) = \sqrt{a^2 + b^2} \sin(x + \alpha)$$

$$A = \sin x + \sqrt{3} \cos x \Rightarrow \sqrt{a^2 + b^2} = 2$$

$$A = 2 \left(\frac{1}{2} \sin x + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos x \right) = 2(\cos 60 \sin x + \sin 60 \cos x)$$

$$\rightarrow A = 2 \sin \left(x + \frac{\pi}{3} \right) \rightarrow \max(A) = 2, \min(A) = -2$$

مثال ۵ (تمرین) عبارت $\frac{\cos(20) + \sqrt{3} \sin(20)}{\cos(40)}$ را ساده کنید

مثال ۶ حاصل $\frac{1 + \tan(20)}{1 - \tan(20)}$ را برحسب تابع کتانژانت بدست آورید.

$$\frac{1 + \tan(20)}{1 - \tan(20)} = \tan\left(20 + \frac{\pi}{4}\right) = \tan 65 = \cot(90 - 65) = \cot 25$$

مثال ۷ اگر $\tan(x + 20) = 0.75$ باشد، حاصل $\cot(25 - x)$ را بدست آورید

$$x + 20 = y \quad 45 - y = 25 - x \rightarrow$$

$$\tan(45 - y) = \frac{1 - \tan y}{1 + \tan y} = \frac{0.25}{1.75} = \frac{1}{7} \rightarrow \cot(45 - y) = 7 \rightarrow \cot(25 - x) = 7$$

مثال ۸ حاصل عبارت $\frac{\cot(20) - 1}{\cot(20) + 1}$ را ساده کنید

مثال ۹ اگر $\tan(x + y) = \frac{2}{5}$ ، $\tan(x - y) = \frac{3}{7}$ باشد، حاصل $\tan(2x)$ را بدست آورید

$$x - y = A, \quad x + y = B \rightarrow 2x = A + B$$

$$\tan(2x) = \tan(A + B) = \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B} = \frac{\frac{3}{7} + \frac{2}{5}}{1 - \frac{3}{7} \times \frac{2}{5}} = \frac{\frac{29}{35}}{1 - \frac{6}{35}} = 1$$

مثال ۱۰ (تمرین) اگر $\tan(2x - \frac{y}{3}) = \sqrt{3} - 1$ ، $\tan(2x + \frac{y}{3}) = \sqrt{3} + 1$ باشد، حاصل

$\tan(\frac{2y}{3})$ را بدست آورید

یک رابطه بسیار مهم

$$9. \quad \tan x \pm \tan y = \frac{\sin(x \pm y)}{\cos x \cos y}$$

$$\tan x + \tan y = \frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\sin y}{\cos y} = \frac{\sin x \cos y + \cos x \sin y}{\cos x \cos y} = \frac{\sin(x + y)}{\cos x \cos y}$$

مثال ۱۱ حاصل عبارت $\tan(50) + \tan(20)$ را ساده کنید

$$\tan(50) + \tan(20) = \frac{\sin(50 + 20)}{\cos 20 \cos 50} = \frac{\sin 70}{\cos 20 \cos 50} = \frac{1}{\cos 50}$$

۱-۳ یک سری مثال خوفناک

مثال ۱۲ نشان دهید $2\cos^2(10) - 2\cos^2(20) = \sin(10)$

$$I. 2\cos^2(10) - 2\cos^2(20) = 2\sin(20+10)\sin(20-10) = 2\sin 30\sin 10 = \sin 10$$

$$II. 2\cos^2(10) - 2\cos^2(20) = (1 + \cos 20) - (1 + \cos 40) = \cos 20 - \cos 40 =$$

$$\cos 20 - \cos 40 = \cos(30-10) - \cos(30+10) =$$

$$(\cos 30\cos 10 + \sin 30\sin 10) - (\cos 30\cos 10 - \sin 30\sin 10) = 2\sin 30\sin 10 = \sin 10$$

تذکره ۱  ایده موجود در راه ۲: ایده زاویه میانگین

مثال ۱۳ حاصل عبارت $\frac{\sin 40 + \sin 20}{\sin 80}$ را ساده کنید

$$\frac{\sin 40 + \sin 20}{\sin 80} = \frac{\sin(30+10) + \sin(30-10)}{\sin 80} =$$

$$\frac{\sin 30\cos 10 + \sin 10\cos 30 + \sin 30\cos 10 - \sin 10\cos 30}{\sin 80} = \frac{2\sin 30\cos 10}{\cos 10} = 1$$

مثال ۱۴ حاصل $\tan(15)\cot(65) + \tan(25)\cot(40) + \tan(50)\cot(75)$ را بیابید.

$$I. \tan(15)\cot(65) + \tan(25)\cot(40) + \tan(50)\cot(75) = \tan(15)\tan(25) + \tan(25)\tan(50) + \tan(50)\tan(15) =$$

$$15 + 25 + 50 = 90 = \frac{\pi}{2} \rightarrow \tan(15)\tan(25) + \tan(25)\tan(50) + \tan(50)\tan(15) = 1$$

$$II. \tan(15)\tan(25) + \tan(25)\tan(50) + \tan(50)\tan(15) = \tan(15)(\tan 25 + \tan 50) + \tan(25)\tan(50)$$

$$\rightarrow \tan(75) = \tan(50 + 25) = \frac{\tan 50 + \tan 25}{1 - \tan 50 \tan 25} \rightarrow \tan 50 + \tan 25 = \tan 75 - \tan 75 \tan 50 \tan 25 \quad (*) \rightarrow$$

$$\tan(15)(\tan 25 + \tan 50) + \tan(25)\tan(50) = \tan 15(\tan 75 - \tan 75 \tan 50 \tan 25) + \tan(25)\tan(50) =$$

$$\tan 15 \tan 75 - \tan 15 \tan 75 \tan 50 \tan 25 + \tan(25)\tan(50) = 1 - \tan(25)\tan(50) + \tan(25)\tan(50) = 1$$

یک مثال جالب دیگر در متفرقه! + ضرب به جمع و جمع به ضرب + ۹ مساله مهم دیگر

۱-۴ روابط اختیاری

۱-۴-۱ سه برابر کمان


1. $\sin(3x) = 3\sin(x) - 4\sin^3(x)$

$$\begin{aligned} \sin(3x) &= \sin(2x + x) = \sin 2x \cos x + \sin x \cos 2x = 2\sin x \cos^2 x + \sin x (1 - 2\sin^2 x) \\ &= 2\sin x (1 - \sin^2 x) + \sin x - 2\sin^3 x = 2\sin x - 2\sin^3 x + \sin x - 2\sin^3 x = 3\sin x - 4\sin^3 x \end{aligned}$$

2. $\cos(3x) = 4\cos^3(x) - 3\cos(x)$


3. $\tan(3x) = \frac{3\tan(x) - \tan^3(x)}{1 - 3\tan^2(x)}$

$\cot(3x) = \frac{3\cot(x) - \cot^3(x)}{1 - 3\cot^2(x)}$

مثال ۱۵  برد تابع $f(x) = \cos(x)(2\cos(2x) - 1)$ را با شرط $-\frac{\pi}{9} < x < \frac{\pi}{9}$ بدست آورید

$$f(x) = \cos(x)(2\cos(2x) - 1) = \cos x (4\cos^2 x - 2 - 1) = 4\cos^3 x - 3\cos x = \cos 3x$$

$$-\frac{\pi}{9} < x < \frac{\pi}{9} \Rightarrow -\frac{\pi}{3} < 3x < \frac{\pi}{3} \Rightarrow \cos 3x \in \left(\frac{1}{2}, 1\right]$$

مثال ۱۶  (تمرین) حاصل عبارت $9\sin^2(x) - 24\sin^4(x) + 16\sin^6(x)$ را به ازای

$$x = \frac{\pi}{18}$$

بدست آورید

۱-۴-۲ روابط تکمیلی (اختیاری در منزل)

1. $4 \sin(x) \sin\left(\frac{\pi}{3}-x\right) \sin\left(\frac{\pi}{3}+x\right) = \sin(3x)$, $4 \cos(x) \cos\left(\frac{\pi}{3}-x\right) \cos\left(\frac{\pi}{3}+x\right) = \cos(3x)$
2. $\tan(x) \tan\left(\frac{\pi}{3}-x\right) \tan\left(\frac{\pi}{3}+x\right) = \tan(3x)$, $\cot(x) \cot\left(\frac{\pi}{3}-x\right) \cot\left(\frac{\pi}{3}+x\right) = \cot(3x)$
3. $\tan(x) + \tan\left(x \pm \frac{\pi}{3}\right) + \tan\left(x \pm \frac{2\pi}{3}\right) = 3 \tan(3x)$, $\cot(x) + \cot\left(x \pm \frac{\pi}{3}\right) + \cot\left(x \pm \frac{2\pi}{3}\right) = 3 \cot(3x)$

$$x + y + z = 0 \text{ or } k\pi$$

$$4. \begin{cases} \tan(x) + \tan(y) + \tan(z) = \tan(x) \tan(y) \tan(z) \\ \cot(x) \cot(y) + \cot(y) \cot(z) + \cot(x) \cot(z) = 1 \end{cases}$$

$$x + y + z = \frac{k\pi}{2} \quad (k = 2n + 1)$$

$$5. \begin{cases} \cot(x) + \cot(y) + \cot(z) = \cot(x) \cot(y) \cot(z) \\ \tan(x) \tan(y) + \tan(x) \tan(z) + \tan(y) \tan(z) = 1 \end{cases}$$

اثبات ۱ :

$$4 \sin(x) \sin\left(\frac{\pi}{3}-x\right) \sin\left(\frac{\pi}{3}+x\right) = 4 \sin x \left(\sin^2 \frac{\pi}{3} - \sin^2 x\right) =$$

$$4 \sin x \left(\frac{3}{4} - \sin^2 x\right) = 3 \sin x - 4 \sin^3 x = \sin 3x$$

اثبات ۴ :

$$x + y + z = 0$$

$$x + y = -z$$

$$\tan(x + y) = \tan(-z) \rightarrow \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y} = -\tan z$$

$$\tan x + \tan y = -\tan z + \tan x \tan y \tan z \rightarrow \tan x + \tan y + \tan z = \tan x \tan y \tan z$$

$$\frac{1}{\cot x} + \frac{1}{\cot y} + \frac{1}{\cot z} = \frac{1}{\cot x} \frac{1}{\cot y} \frac{1}{\cot z} \rightarrow$$

$$\frac{\cot(y) \cot(z) + \cot(x) \cot(z) + \cot(x) \cot(y)}{\cot x \cot y \cot z} = \frac{1}{\cot x \cot y \cot z} \rightarrow$$

$$\cot(y) \cot(z) + \cot(x) \cot(z) + \cot(x) \cot(y) = 1$$

اثبات ۲ به راحتی با ۱

اثبات ۳ در متفرقه

مثال ۱۷ مثال از روابط اختیاری - حاصل عبارت زیر را ساده کنید

1. $\tan 25 \cdot \tan 35 \cdot \tan 85 \cdot \tan 15$

$$x = 25 \Rightarrow \tan(x) \tan\left(\frac{\pi}{3} - x\right) \tan\left(\frac{\pi}{3} + x\right) = \tan(3x)$$

$$\tan 25 \cdot \tan 35 \cdot \tan 85 = \tan 75 = \cot 15$$

$$\tan 25 \cdot \tan 35 \cdot \tan 85 \cdot \tan 15 = \cot 15 \tan 15 = 1$$

2. $256 \sin 10 \cdot \sin 20 \cdot \sin 30 \dots \sin 90$

3. $\cot(20) \cot(40) \cot(100)$

$$\cot(20) \cot(40) \cot(100) = -\cot(20) \cot(40) \cot(80)$$

$$x = 20 \Rightarrow \cot(x) \cot\left(\frac{\pi}{3} - x\right) \cot\left(\frac{\pi}{3} + x\right) = \cot(3x)$$

$$-\cot(20) \cot(40) \cot(80) = -\cot 60 = \frac{-\sqrt{3}}{3}$$

4. $\tan(25) + \tan(85) - \tan(35)$

$$\tan(25) + \tan(85) - \tan(35) = \tan(25) + \tan(85) + \tan(145)$$

$$x = 25 \Rightarrow \tan(x) + \tan(x + 60) + \tan(x + 120) = 3 \tan(3x)$$

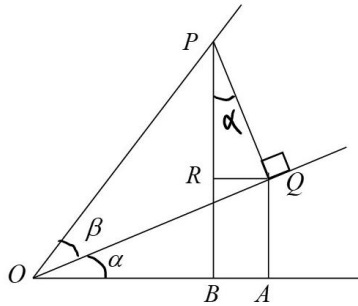
$$\tan(25) + \tan(85) + \tan(145) = 3 \tan(75)$$

۲ متفرقه

۲-۱ از روابط یازدهم رشته ریاضی

۲-۱-۱ یک سری اثباتی ها

اثبات فرمول بسط جمع کمان



$$\begin{aligned} \sin(\alpha + \beta) &= \frac{\overset{\triangle OBP}{PB}}{OP} = \frac{PR + RB}{OP} \stackrel{RB=AQ}{=} \frac{PR}{OP} + \frac{AQ}{OP} \\ &= \frac{PR}{PQ} \times \frac{PQ}{OP} + \frac{AQ}{OQ} \times \frac{OQ}{OP} \\ &= \underset{\triangle PRQ}{\cos \alpha} \underset{\triangle OPQ}{\sin \beta} + \underset{\triangle OQA}{\sin \alpha} \underset{\triangle OPQ}{\cos \beta} \end{aligned}$$

اثبات شماره ۳ روابط تکمیلی

$$\tan(x) + \tan\left(x \pm \frac{\pi}{3}\right) + \tan\left(x \pm \frac{2\pi}{3}\right) = 3 \tan(3x)$$

$$\tan x + (\tan(x + \frac{\pi}{3}) + \tan(x + \frac{2\pi}{3})) = \tan x + \frac{\sin(x + \frac{\pi}{3} + x + \frac{2\pi}{3})}{\cos(x + \frac{\pi}{3})\cos(x - \frac{\pi}{3})} = \frac{\sin x}{\cos x} + \frac{2 \sin x \cos x}{\cos^2 x - \frac{1}{4}} \rightarrow \cos^2 x = 1 - \sin^2 x$$

$$= \frac{\sin x(1 - \sin^2 x) - \frac{1}{4} \sin x + 2 \sin x \cos^2 x}{\cos^2 x - \frac{1}{4} \cos x} = \frac{\sin x - \sin^3 x - \frac{1}{4} \sin x + 2 \sin x(1 - \sin^2 x)}{\frac{1}{4} (4 \cos^2 x - 3 \cos x)}$$

$$\frac{\frac{3}{4} \sin x - 3 \sin^3 x}{\frac{1}{4} \cos^2 x} = \frac{3 \sin x - 12 \sin^3 x}{\cos^2 x} = \frac{3(3 \sin x - 4 \sin^3 x)}{\cos^2 x} = \frac{3 \sin 3x}{\cos^2 x} = 3 \tan 3x$$

۲-۱-۲ یک مثال خفن و یک فرمول جالب

 حاصل $\sin(3a)\sin^2(a) + \cos(3a)\cos^2(a)$ را ساده کنید؟

راه ۱:

$$\begin{aligned} \sin(3a)\sin^2(a) + \cos(3a)\cos^2(a) &= \sin 3a \sin a \sin^2 a + \cos 3a \cos a \cos^2 a \\ &= \sin(2a+a)\sin(2a-a)\sin^2 a + \cos(2a+a)\cos(2a-a)\cos^2 a = \\ &(\sin^2 2a - \sin^2 a)\sin^2 a + (\cos^2 2a - \cos^2 a)\cos^2 a = \\ &(\cos^2 a - \cos^2 2a)(1 - \cos^2 a) + (-1 + \cos^2 a + \cos^2 2a)\cos^2 a = \\ &\cos^2 a - \cos^2 a - \cos^2 2a + \cos^2 2a \cos^2 a - \cos^2 a + \cos^2 a + \cos^2 2a \cos^2 a = \\ &\cos 2a(2 \cos a - 1) = \cos^2 2a(\cos 2a) = \cos^3 2a \end{aligned}$$

راه ۲:

$$\begin{aligned} \sin(3a)\sin^2(a) + \cos(3a)\cos^2(a) &= \sin 3a \sin a(1 - \cos^2 a) + \cos 3a \cos a(1 - \sin^2 a) \\ &= \sin 3a \sin a + \cos 3a \cos a - \sin 3a \sin a \cos^2 a - \cos 3a \cos a \sin^2 a \\ &= \cos(3a-a) - \sin a \cos a(\sin 3a \cos a + \cos 3a \sin a) \\ &= \cos 2a - \frac{1}{2} \sin 2a(2 \sin 2a \cos 2a) \\ &= \cos 2a - \sin^2 2a \cos 2a = \cos 2a(1 - \sin^2 2a) \\ &= \cos 2a \cos^2 2a = \cos^3 2a \end{aligned}$$

اثبات زاویه بین دو خط

 می‌توان نشان داد که: زاویه (θ) بین دو خط با شیب‌های m_1, m_2 ، از رابطه زیر بدست می‌آید.

$$\tan \theta = \left| \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2} \right|$$

۲-۱-۳ روابط جمع به ضرب و ضرب به جمع
جمع به ضرب

$$\sin(p) \pm \sin(q) = 2 \sin\left(\frac{p \pm q}{2}\right) \cos\left(\frac{p \mp q}{2}\right)$$

$$\cos(p) + \cos(q) = 2 \cos\left(\frac{p+q}{2}\right) \cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

$$\cos(p) - \cos(q) = -2 \sin\left(\frac{p+q}{2}\right) \sin\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

$$\tan(p) \pm \tan(q) = \frac{\sin(p \pm q)}{\cos(p) \cos(q)}$$

$$\cot(p) \pm \cot(q) = \frac{\sin(q \pm p)}{\sin(p) \sin(q)}$$

تذکر: فقط جمع و تفریق دو کمان مختلف یک نسبت مثلثاتی

ضرب به جمع

$$\sin(a) \cos(b) = \frac{1}{2} [\sin(a+b) + \sin(a-b)]$$

$$\cos(a) \cos(b) = \frac{1}{2} [\cos(a+b) + \cos(a-b)]$$

$$\sin(a) \sin(b) = \frac{-1}{2} [\cos(a+b) - \cos(a-b)]$$

مثال ۱: حاصل $\sin 40^\circ + \sin 70^\circ$ چقدر است؟

با جمع به ضرب:

$$\sin 40^\circ + \sin 70^\circ = \sin 40^\circ + \sin 20^\circ = 2 \sin \frac{40^\circ + 20^\circ}{2} \cos \frac{40^\circ - 20^\circ}{2} = 2 \sin 30^\circ \cos 10^\circ = \cos 10^\circ$$

بدون جمع به ضرب:

$$I. \sin 40^\circ + \cos 70^\circ = \sin 40^\circ + \sin 20^\circ = 2 \sin 20^\circ \cos 20^\circ + \sin 20^\circ =$$

$$\sin 20^\circ (2 \cos 20^\circ + 1) = \sin 20^\circ (1 - 2 \sin^2 10^\circ + 1) = 2 \sin 10^\circ \cos 10^\circ (3 - 4 \sin^2 10^\circ) =$$

$$2 \cos 10^\circ (3 \sin 10^\circ - 4 \sin^3 10^\circ) = 2 \cos 10^\circ \sin(3 \times 10^\circ) = \cos 10^\circ$$

$$II. \sin 40^\circ + \cos 70^\circ = \sin 40^\circ + \sin 20^\circ = \sin(30^\circ + 10^\circ) + \sin(30^\circ - 10^\circ) =$$

$$\sin 30^\circ \cos 10^\circ + \sin 10^\circ \cos 30^\circ + \sin 30^\circ \cos 10^\circ - \sin 10^\circ \cos 30^\circ = 2 \sin 30^\circ \cos 10^\circ = \cos 10^\circ$$

مثال ۲: حاصل $\sin 105 \cos 75$ چقدر است؟

با ضرب به جمع:

$$\sin 105 \cos 75 = \frac{1}{2} [\sin(105 + 75) + \sin(105 - 75)] = \frac{1}{2} [\sin 180 + \sin 30] = \frac{1}{2} (0 + \frac{1}{2}) = \frac{1}{4}$$

بدون ضرب به جمع:

$$\sin 105 = \cos 15, \quad \cos 75 = \sin 15$$

$$\sin 105 \cos 75 = \sin 15 \cos 15 = \frac{1}{2} \sin(2 \times 15) = \frac{1}{2} \sin 30 = \frac{1}{4}$$

تذکر: دلیلی ندارد همواره بتوان بدون این روابط (ضرب به جمع، جمع به ضرب) مسائل را حل کرد یا بهتر است بگوییم اگر هم بشود شاید بسیار سخت باشد، حواستان باشد!

مثال ۳ (یک سوال معروف و فوق اختیاری!):

نکته: هرگاه مجموع چند سینوس و یا مجموع چند کسینوس مدنظر باشد و کمان‌های آنها تشکیل دنباله حسابی با قدرنسبت r دهند، کفایت کل عبارت را در $(2 \sin \frac{r}{2})$ ضرب کرده و تمام جملات حاصل ضربی را به جمع تبدیل کنید و

ساده سازی کنید:

نشان دهید:

$$\cos \frac{2\pi}{7} + \cos \frac{4\pi}{7} + \cos \frac{6\pi}{7} = -\frac{1}{2}$$

$$r = \frac{2\pi}{7} \rightarrow \times 2 \sin \frac{\pi}{7}, \dots$$

آیا روش حل دیگری برای مساله قبلی می‌توانید پیدا کنید؟

۲-۱-۴ دیگر مسائل ویژه پایه یازدهم رشته ریاضی

مثال ۱: حاصل $\frac{\cos(a+b)\cos b + \sin(a+b)\sin b}{\sin(a+b)\cos b - \cos(a+b)\sin b}$ را پیدا کنید.

$$\frac{\cos(a+b)\cos b + \sin(a+b)\sin b}{\sin(a+b)\cos b - \cos(a+b)\sin b}$$

$$= \frac{\cos(a+b-b)}{\sin(a+b-b)} = \frac{\cos a}{\sin a} = \cot a$$

مثال ۲: حاصل $(\tan(2x) \tan(x) + 1) = \tan(x - 2x)$ را بیابید. (راهنمایی: $\tan(x - 2x) = \tan x$)

$$\tan(2x - x) = \tan x$$

$$\rightarrow \frac{\tan 2x - \tan x}{1 + \tan 2x \tan x} = \tan x$$

$$\rightarrow \frac{\tan 2x - \tan x}{\tan x} = 1 + \tan 2x \tan x$$

$$\rightarrow \frac{\tan 2x}{\tan x} - 1 = ? \rightarrow \frac{\frac{\sin 2x}{\cos 2x}}{\frac{\sin x}{\cos x}} - 1 = ? \Rightarrow \frac{\sin 2x \cos x}{\sin x \cos 2x} - 1 = ?$$

$$\rightarrow ? = \frac{\cos 2x + \cos x}{\sin x + \sin 2x} = \frac{2 \cos^2 x + \cos x}{\sin x + 2 \sin x \cos x}$$

مثال ۳: عبارت $\frac{1 + \cos x + \cos 2x}{\sin x + \sin 2x}$ را ساده کنید.

$$\frac{1 + \cos 2x + \cos x}{\sin x + \sin 2x} = \frac{2 \cos^2 x + \cos x}{\sin x + 2 \sin x \cos x} = \frac{\cos x(2 \cos x + 1)}{\sin x(1 + 2 \cos x)} = \cot x$$

مثال ۴: حاصل عبارت $\tan\left(\frac{\pi}{6} + \frac{x}{2}\right) \tan\left(\frac{\pi}{6} - \frac{x}{2}\right)$ را بر حسب $\cos x$ بدست آورید.

$$\tan\left(\frac{\pi}{6} + \frac{x}{2}\right) \tan\left(\frac{\pi}{6} - \frac{x}{2}\right) = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{6} + \frac{x}{2}\right) \sin\left(\frac{\pi}{6} - \frac{x}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{6} + \frac{x}{2}\right) \cos\left(\frac{\pi}{6} - \frac{x}{2}\right)} = \frac{\sin^2 \frac{\pi}{6} - \sin^2 \frac{x}{2}}{\cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{\pi}{6}}$$

$$= \frac{\frac{1}{4} - \sin^2 \frac{x}{2}}{\cos^2 \frac{x}{2} - \frac{1}{4}} = \frac{\frac{1}{4} - \left(\frac{1 - \cos x}{2}\right)}{\left(\frac{1 + \cos x}{2}\right) - \frac{1}{4}} = \frac{\frac{\cos x}{2} - \frac{1}{4}}{\frac{\cos x}{2} + \frac{1}{4}} = \frac{2 \cos x - 1}{2 \cos x + 1}$$

مثال ۵: عبارت $\frac{3 + 4 \cos 4x + \cos 8x}{3 - 4 \cos 4x + \cos 8x}$ را ساده نمائید.

$$\frac{3 + 4 \cos 4x + \cos 8x}{3 - 4 \cos 4x + \cos 8x} \rightarrow \cos 8x = 2 \cos^2 4x - 1$$

$$\Rightarrow \frac{2 \cos^2 4x + 4 \cos 4x + 2}{2 \cos^2 4x - 4 \cos 4x + 2} = \left(\frac{1 + \cos 4x}{1 - \cos 4x} \right)^2 = \left(\frac{2 \cos^2 2x}{2 \sin^2 2x} \right)^2 = \cot^4 2x$$

مثال ۶: اگر $\cos x = \frac{3}{5}$ باشد در این صورت مقدار مثبت $\tan \frac{x}{2}$ را پیدا کنید.

$$\cos x = \frac{1 - \tan^2 \frac{x}{2}}{1 + \tan^2 \frac{x}{2}} = \frac{3}{5} \Rightarrow 5 - 5 \tan^2 \frac{x}{2} = 3 + 3 \tan^2 \frac{x}{2}$$

$$\rightarrow 2 \tan^2 \frac{x}{2} = 2 \Rightarrow \tan^2 \frac{x}{2} = 1 \Rightarrow \tan \frac{x}{2} = \pm 1 \rightarrow \dots$$

مثال ۷: حاصل عبارت $\frac{\tan^2 25 - \tan^2 20}{1 - \tan^2 25 \tan^2 20}$ را بدست آورید؟

$$\frac{\tan^2 25 - \tan^2 20}{1 - \tan^2 25 \tan^2 20} = \frac{\tan 25 - \tan 20}{1 - \tan 25 \tan 20} \times \frac{\tan 25 + \tan 20}{1 - \tan 25 \tan 20}$$

$$= \tan(25 - 20) \times \tan(25 + 20) = \tan 45$$

مثال ۸: اگر $\alpha + \beta = k\pi + \frac{\pi}{4}, k \in \mathbb{Z}$ باشد، حاصل $(1 + \tan \alpha)(1 + \tan \beta)$ را بدست آورید.

بدنیست بدانیم: $\tan(k\pi + x) = \tan(x)$

$$\tan(\alpha + \beta) = \tan(k\pi + \frac{\pi}{4}) = \tan \frac{\pi}{4} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta} = 1 \Rightarrow \tan \alpha + \tan \beta = 1 - \tan \alpha \tan \beta$$

$$\Rightarrow (1 + \tan \alpha)(1 + \tan \beta) = \tan \alpha + \tan \beta + 1 + \tan \alpha \tan \beta$$

$$= 1 - \cancel{\tan \alpha \tan \beta} + 1 + \cancel{\tan \alpha \tan \beta} = 2$$

۲-۱-۵ پنج مساله کاربردی مثلث ویژه یازدهم ریاضی

مثال ۱: (یازدهم R): در مثلثی $B = 60^\circ$ و همچنین رابطه $c + \sqrt{2}b = 2a$ برقرار می‌باشد، مابقی زوایا را محاسبه کنید.

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sqrt{3}} = \frac{c}{\sin C} = 2R \Rightarrow 2R \sin C + 2R \frac{\sqrt{6}}{2} = 2R(2 \sin A)$$

$$\left. \begin{aligned} 2 \sin A - \sin C &= \frac{\sqrt{6}}{2} \\ A &= 120^\circ - C \\ \sin A &= \frac{\sqrt{3}}{2} \cos C - \left(-\frac{1}{2}\right) \sin C \end{aligned} \right\} \Rightarrow \sqrt{3} \cos C + \sin C - \sin C = \frac{\sqrt{6}}{2} \rightarrow \cos C = \frac{\sqrt{2}}{2} \rightarrow C = 45^\circ \rightarrow A = 75^\circ$$

مثال ۲: (یازدهم R): اگر بدانیم $\frac{c}{2a} = \cos B$ نوع مثلث را تعیین کنید.

$$\frac{c}{a} = 2 \cos B = \frac{\sin C}{\sin A} \xrightarrow{C=\pi-(A+B)} \frac{\sin A \cos B + \sin B \cos A}{\sin A} = 2 \cos B$$

$$\rightarrow 2 = 1 + \tan B \cot A \rightarrow \tan A = \tan B \rightarrow \hat{A} = \hat{B}$$

مثال ۳: (یازدهم R): اگر بدانیم $\frac{B}{3} = C$ ، $b = 2c$ ، $a \cos C + c \cos A = 6$ ، اضلاع مثلث را بدست آورید.

$$\Rightarrow b = 6, \hat{B} = 3\hat{C} \Rightarrow \frac{b}{c} = \frac{\sin B}{\sin C} = 2 \rightarrow \frac{\sin 3C}{\sin C} = 2$$

$$\rightarrow \frac{3 \sin C - 4 \sin^3 C}{\sin C} = 2 \Rightarrow 3 - 4 \sin^2 C = 2 \Rightarrow \sin C = \pm \frac{1}{2} \Rightarrow \hat{C} = 30^\circ$$

$$\rightarrow \hat{B} = 90^\circ \rightarrow \hat{A} = 60^\circ$$

مثال ۴: (یازدهم R): نشان دهید $\frac{a+b}{a-b} = \frac{\tan(\frac{A+B}{2})}{\tan(\frac{A-B}{2})} = \cot \frac{C}{2} \cot(\frac{A-B}{2})$

$$= \frac{\sin A + \sin B}{\sin A - \sin B} \times \frac{\cos A + \cos B}{\cos B + \cos A} = \frac{\sin A \cos B + \sin B \cos A + \sin A \cos A + \sin B \cos B}{\sin A \cos B - \sin B \cos A + \sin A \cos A - \sin B \cos B}$$

$$= \frac{\sin(A+B) + \sin(A+B) \cos(A-B)}{\sin(A-B) + \sin(A-B) \cos(A+B)} = \frac{\sin(A+B)[1 + \cos(A-B)]}{\sin(A-B)[1 + \cos(A+B)]} = \frac{\frac{\sin(A+B)}{1 + \cos(A+B)}}{\frac{\sin(A-B)}{1 + \cos(A-B)}} = \frac{\tan(\frac{A+B}{2})}{\tan(\frac{A-B}{2})}$$

مثال ۵: شکل فضایی و نیز شکل گسترده یک مخروط در زیر داده شده است. شعاع قاعده مخروط $r = 6\text{cm}$ و ارتفاع آن $h = 8\text{cm}$ می‌باشد. اندازه زاویه قطاع حاصل از شکل گسترده این مخروط چند رادیان است؟

