امیر وفائی

جزوات آموزش ریاضی

آموزش تخصصی ریاضیات

شمارش، بدون شمردن
(آنالیز ترکیبی)

فصل ۶ دهم

ریاضی و تجربی ۱۰

@Vafaei_math

AmirVafaei6

0936 879 1709

0911 197 6626

فهرست مطالب

فهرست مطالب .... أ

۱ دو اصل مهم ۱

۱-۱ اصل ضرب ۱

۱-۲ اصل جمع ۱

۲ تبدیلات (جایگشت) ۲

۲-۱ تبدیل خاص ۱: کنار هم بودن ۳

۲-۲ تبدیل خاص ۲: هیچ دوتایی کنار هم نباشند ۳

۲-۳ تبدیل خاص ۳: جایگشت های یک در میان ۴

2-4 تبدیل خاص ۴: جایگشت دوری ۴

۲-۵ تبدیل خاص ۵: جایگشت دوری - برگردان ۵

۲-۶ تبدیل خاص ۶: جایگشت تکراری ۵

2-7 تبدیل خاص ۷: جایگشت با دسته بندی (r شی از nشی) ۶

۳ ترکیب ۷

۳-۱ اصل داستان ترکیب ۷

۳-۲ چند ترکیب مهم! ۷

۳-۳ ترکیبات شامل و فاقد ۸

۳-۴ رابطه تبدیل و ترکیب ۹

۳-۵ اتحادهای ترکیبیاتی (تفسیر در متفرقه !) ۹

۴ چند کاربرد مهم ۱۰

۴-۱ شمارش توابع ۱۰

۴-۲ تعداد زیرمجموعه ها ۱۱

۴-۳ مقسوم علیههای یک عدد ۱۱

۴-۴ بخش پذیری ۱۲

۵ گروه بندی ۱۲

6 مسائل بیشتر ۱۳

7 مسائل و موارد متفرقه (اختیاری) ۱۵

۱-۷ قرار دادن n شی یکسان در k جعبه متمایز ۱۵
۲-۷ تفسیرات اتحاد های ترکیبیاتی ۱۶
۳-۷ سایر مثال ها ۱۸
۴-۷ ۶ مساله چالشی ۲۳
۵-۷ مساله بسط ویژه علاقه مندان ۲۵
۸ کاردرخانه ۲۶
۹ یادداشت ۲۷

1 دو اصل مهم

۱-۱ اصل ضرب

هرگاه عمل اول را به $n_۱$ طریق و عمل دوم را به $n_۲$ طریق و ..... و عمل k ام را به n_k طریق بتوان انجام داد، آنگاه انجام این k عمل به دنبال هم به $n_۱n_۲n_۳......n_k$ طریق ممکن است.

۳ شلوار و ۲ پیراهن

۱-۲ اصل جمع

هرگاه عمل اول را به $n_۱$ طریق و عمل دوم را بدون ارتباط با عمل قبلی به $n_۲$ طریق و ..... و عمل k ام را بدون ارتباط با عمل قبلی به n_k طریق بتوان انجام داد، آنگاه انجام این k عمل به دنبال هم به $n_۱+n_۲+n_۳+......+n_k$ طریق ممکن است.

۳ غذای فست فودی یا ۲ غذای سنتی

مثال ۱) از میان ۴ تهرانی و ۵ ساروی و ۶ مشهدی ، به چند طریق می توان دو نماینده انتخاب نمود که از شهرهای مختلف باشند؟

مثال ۲) با استفاده از ارقام ۰، ۱، ۲، ۳، ۴، ۵ چند عدد کوچک‌تر از ۵۰۰ و بزرگ‌تر از ۲۰ می‌توان ساخت طوری که تکرار ارقام جایز باشد؟

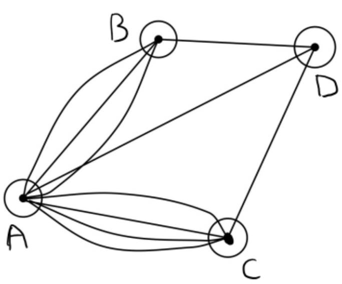
جواب=۱۴۴+۲۳ =۱۶۷   سه رقمی   یا   دو رقمی

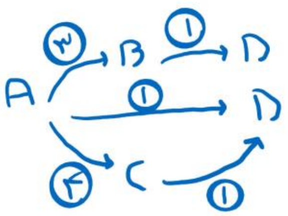
[۱، ۲، ۳، ۴] [ ] [ ]   [۲، ۳، ۴، ۵] [ ]

۴×۶×۶ =۱۴۴   ۴×۶− ۱=۲۳

مثال ۳) با استفاده از حروف کلمه tragedy چند کلمه می‌توان ساخت که حرف g درست در وسط آن باشد و با حرف صدا دار شروع و تمام شود؟

مثال ۴) به چند طریق می توان از شهر A به شهر D رفت؟





⟹ (۳×۱) + (۱) + (۴×۱) = ۸

2 تبدیلات (جایگشت)

فاکتوریل !

$n! = ۱\times۲\times۳\times....\times n$

$۰! = ۱ \quad , \quad ۱! = ۱ \quad , \quad ۲! = ۲\times۱ = ۲$

$۳! = ۳\times۲\times۱ = ۶$

$۴! = ۴\times۳\times۲\times۱ = ۲۴$

$۵! = ۵\times۴\times۳\times۲\times۱ = ۱۲۰$

$۶! = ۶\times۵! = ۷۲۰$

تبدیل یا جایگشت چیست ؟

دسته‌بندی کردن اشیا طوریکه نوع اشیا قرار گرفته در دسته‌ها و نیز ترتیب قرار گرفتن در دسته‌ها حائز اهمیت باشد را تبدیل گویند. به طور کلی مسائلی که با **چیدن** در ارتباطند از جنس تبدیلند!

تبدیل r شی از n شی : $(n)_r = p(n,r) = n(n-1).....(n-(r-1)) = \frac{n!}{(n-r)!}$

مثال ۵) پنج نفر به چند طریق می‌توانند در یک صف قرار بگیرند ؟

.... نفر ..... جا : ....

مثال ۶) در یک ساختمان ۱۰ طبقه یک آسانسور با ۷ سرنشین از هم‌کف شروع کرده و هر طبقه یک نفر را پیاده می‌کند . این امر به چند طریق امکان‌پذیر است؟

$۱۰\times۹\times۸\times۷\times۶\times۵\times۴ = \frac{(۱۰\times۹\times۸\times۷\times۶\times۵\times۴)(۳\times۲\times۱)}{(۳\times۲\times۱)} = \frac{۱۰!}{۳!} = (۱۰)_۷$

تذکر ۱) **تکرار در این مساله جایز نیست!**

مثال ۷) با نمادهای +و - چند پیام متشکل از ۱۰ کاراکتر می‌توان ساخت؟

تذکر ۲) **اصولا در مسائل شرایطی محدودکننده طرح می‌گردد که قضیه تبدیل در لباس فرمولی‌اش کمک نمی‌کند و باید از مفهوم آن که همان اصل ضرب می‌باشد استفاده نمود.**

مثال ۸) به چند طریق حروف کلمه second را می‌توان مرتب نمود که حروف صدادار در مکان‌های زوج قرار گیرد؟

زوج فرد زوج فرد زوج فرد

حرف e ... حالت و حرف o ..... حالت و ۴ حرف دیگر و ۴ جا ..... پس در کل

۲-۱ تبدیل خاص ۱: کنار هم بودن

مثال ۹) با ارقام ۹,۸,۷,۶,۵,۴,۳,۱ چند عدد ۸ رقمی می توان ساخت طوریکه اعداد زوج کنارهم باشند؟ (بدون تکرار ارقام)

(۴,۶,۸),(۱),(۳),(۵),(۷),(۹) $\Rightarrow$ ۶!×۳!

مثال ۱۰) در چه تعداد از اعداد مثال فوق، اعداد اول نیز کنار هم قرار دارند؟

(۴,۶,۸),(۳,۵,۷),(۱),(۹) $\Rightarrow$ ۴!×۳!×۳!

مثال ۱۱) با ارقام عدد ۵۷۴۶۲چند عدد ۵ رقمی می توان ساخت که اعداد زوج کنار هم نباشند؟

تذکر ۳) یک یادآوری خیلی کاربردی و دور از انتظار!

$$|A-B|=|A\cap B'|=|A|-|A\cap B| \qquad |A'\cap B'|=|(A\cup B)'|=|M|-|A\cup B| \qquad |A'|=|M|-|A|$$

حل مثال ۱۱:

مثال ۱۲) با حروف کلمه computer چند تبدیل ۸ حرفی می‌توان ساخت که حروف با صدا کنار هم بوده ولی حروف m و p کنار هم نباشند؟

(با صدا کنار هم : A * کنار هم بودن M و P : B * خواسته سوال $|A-B|$)

$|A-B|=$ $|A|$ $-$ $|A\cap B|$

$(O,U,E,M,P,C,T,R)-(O,U,E,M,P,C,T,R)$

$=$ ۶!×۳! $-$ ۵!×۳!×۲!

$=$ ۶!×۶ − ۶!×۲ = ۴×۶!

۲-۲ تبدیل خاص ۲: هیچ دوتایی کنار هم نباشند

مثال ۱۳) با ارقام ۱، ۶، ۴، ۷، ۳، ۲، ۵، ۹ چند عدد ۸ رقمی می‌توان ساخت که هیچ دو رقم زوجی کنار هم نباشند؟

فرد: $\square$

* $\square$ * $\square$ * $\square$ * $\square$ * $\square$ *

زوج: *

۶×۵×۴×۵! = $(۵!)^۲$

راه ۲ : این مساله را می توانید به کمک ترکیب هم حل کنید : $\binom{۶}{۳}$×۳!×۵! = $(۵!)^۲$

پس در این سوالات باید ابتدا موانع را چید و در فضاهای بین موانع، به چیدن بقیه موارد بپردازیم.

مثــال ۱۴) ۶ محصل (A) و ۴ معلم (B) را چگونه می‌توان در یک صف قرار داد که هیچ دو معلمی کنار هم قرار نداشته باشند؟

جواب آخر : ۱۵ ×۸!

۲-۳ تبدیل خاص ۳: جایگشت های یک در میان

مثــال ۱۵) ۴ محصل (A) و ۵ معلم (B) به چند طریق کنار هم قرار می‌گیرند که معلم‌ها یک در میان باشند؟

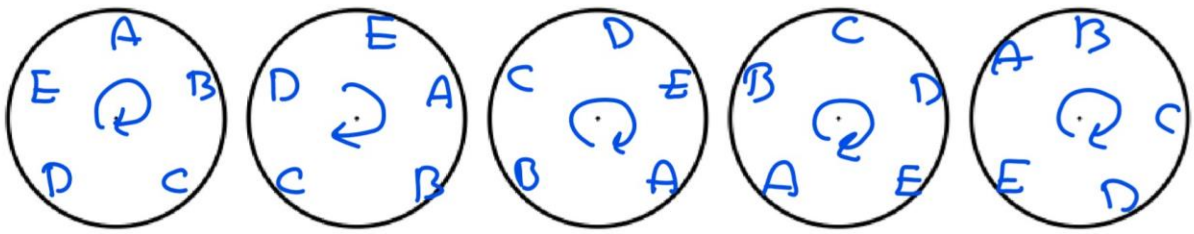
$$B - B - B - B - B \quad = \quad ۴! \times ۵!$$

پس در این سوالات باید ابتدا همان هایی را بچینیم که قرار است یک در میان باشند!

مثــال ۱۶) ۴ محصل (A) و ۵ معلم (B) به چند طریق کنار هم قرار می‌گیرند که محصل‌ها یک در میان باشند؟

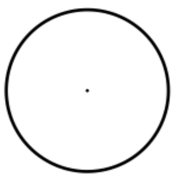
۲-۴ تبدیل خاص ۴: جایگشت دوری

این تبدیل خاص از رابطه $(n-1)!$ بدست می‌آید. زیرا از هر n حالت که بر اثر گردش بدست می‌آید فقط یک حالت پذیرفته می‌گردد در نتیجه داریم $\frac{1}{n} \times n! = (n-1)!$



۵ نفر به چند طریق می توانند در یک میز دایره ای بنشینند ؟

مثــال ۱۷) به چند طریق می توان ۵ دختر و ۵ پسر را دور یک میز چید که یک در میان نشسته باشند!



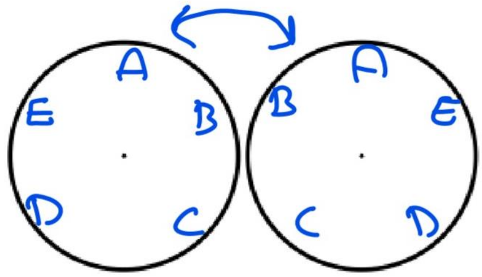
مثــال ۱۸) به چند طریق می‌توان ۵ دانش آموز کلاس اول و ۴ دانش آموز کلاس دوم و ۳ دانش آموز کلاس سوم و ۲ دانش آموز کلاس چهارم ، دست در دست هم یک حلقه تشکیل دهند که هر پایه کنار هم باشند؟

$$(۴-۱)! \times ۵! \times ۴! \times ۳! \times ۲! = ۱۶۰ \times (۳!)^۴$$

۲-۵ تبدیل خاص ۵: جایگشت دوری - برگردان

(مثل گردن‌بند و دست‌بند و جاسوئیچی و ....)

جواب $\frac{(n-۱)!}{۲}$ چون با برگرداندن حالت تازه‌ای ایجاد نمی‌گردد.



مثال ۱۹) با ۸ دانه مروارید مختلف چند دستبند مختلف می‌توان ساخت؟

$\frac{(۸-۱)!}{۲}=\frac{۷!}{۲}=۲۵۲۰$

تذکر ۴) **تعداد حالات نام گذاری یک n ضلعی از جایگشت دوری برگردان بدست می‌آید.**

یک مثال جالب در متفرقه !

۲-۶ تبدیل خاص ۶: جایگشت تکراری

مثلا در مجموع n شی ، $n_۱$ تا از نوع خاص اول و همچنین $n_۲$ تا از نوع خاص دوم و..... طوریکه $n_۱+n_۲+n_۳+......+n_k=n$ باشد. تعداد تبدیلات در این حالت برابر است با :

$$\frac{n!}{n_۱!\times n_۲!\times n_۳!\times ...\times n_k!}$$

فرض کنید ۳ خودکار قرمز مشابه و ۴ خودکار آبی مشابه موجود است و قرار است این هفت خودکار را کنار هم بچینیم :

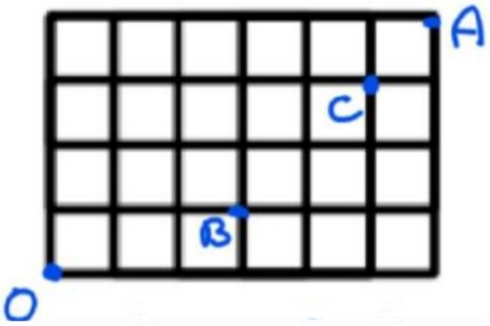
پاسخ کلی مساله !۷ می باشد ولی جابجایی مثلا دو خودکار آبی مشابه با یکدیگر تفاوتی ایجاد نمیکند پس جایگشت خودکارهای مشابه را باید از پاسخ برداریم! یعنی $\frac{۷!}{۳!\times ۴!}$

مثال ۲۰) با ارقام عدد ۲۴۵۳۳۱۲۳۴ چند عدد نه رقمی می‌توان ساخت که ارقام کوچک‌تر از ۴ کنار هم باشند؟

مثال ۲۱) با حروف A, A, B, B, B, C, D, E, E چند کلمه ۹ حرفی می‌توان ساخت که هیچ دو حرف با صدایی کنار هم نباشند؟

❊ ▯ ❊ ▯ ❊▯ ❊ ▯ ❊ ▯ ❊

$\frac{۶\times ۵\times ۴\times ۳}{۲!\times ۲!}\times \frac{۵!}{۳!}=۱۸۰۰$



مثال ۲۲) در شکل مقابل اگر شخصی از O به A حرکت کند، می تواند مسیرهایی مرکب از حرکات به راست و بالا داشته باشد. در اینصورت به سوالات زیر پاسخ دهید:

الف) این شخص چند مسیر متفاوت را تا رسیدن به مقصد می تواند تجربه کند؟

$$\frac{۱۰!}{۶!\times ۴!}=۲۱۰$$

ب) همین مساله را در حالتی حل کنید که شخص بخواهد از B هم بگذرد؟

$$(OB\to BA)\qquad \frac{۴!}{۳!\times ۱!}\times\frac{۶!}{۳!\times ۳!}=۸۰$$

ج) چند مسیر از O به A وجود دارد که از B بگذرد ولی از C نگذرد؟

$$(OB\to BA)-(OB\to BC\to CA)=۸۰-\frac{۴!}{۳!\times ۱!}\times\frac{۴!}{۲!\times ۲!}\times\frac{۲!}{۱!\times ۱!}=۸۰-۴۸=۳۲$$

مثال های شبکه ای بیشتر در ادامه جزوه !

۲-۷ تبدیل خاص ۷: جایگشت با دسته بندی (r شی از n شی)

ابتدا باید نوع عناصر موجود در دسته r تایی مشخص گردد و سپس اقدام به چیدن کنیم!

مثال ۲۳) با ارقام ۲، ۲، ۴، ۴، ۶، ۶ چند عدد سه می‌توان تشکیل داد؟

$(۲,۲,۴)$
$(۲,۲,۶)$
$(۴,۴,۲)$
$(۴,۴,۶)\quad +(۲,۴,۶)\qquad \to ۶\times\frac{۳!}{۲!}+۳!=۱۸+۶=۲۴$
$(۶,۶,۲)$
$(۶,۶,۴)$

مثال ۲۴) با ۵ خط تیره و ۸ نقطه چند پیام رمزی می‌توان ساخت که شامل ۷ کاراکتر باشد ؟

$$\frac{۷!}{۷!}+\frac{۷!}{۶!۱!}+\frac{۷!}{۵!۲!}+\frac{۷!}{۴!۳!}+\frac{۷!}{۳!۴!}+\frac{۷!}{۲!۵!}=۱۲۰$$

یک مثال جالب در متفرقه

3 ترکیب

۳-۱ اصل داستان ترکیب

دسته‌بندی اشیا طوری که تنها نوع اشیا قرار گرفته در دسته‌ها اهمیت داشته‌باشد، را ترکیب گوئیم.
به طور کلی می‌توان گفت، تمامی مسائلی که به نوعی با **انتخاب** درگیر است را ترکیب گوئیم.

ترکیب r شی از n شی :

$$\binom{n}{r} = C(n,r) = \frac{n!}{r!\,(n-r)!}$$

روش حرفه ای محاسبه یک ترکیب!

مثال ۲۵) از بین ۱۰ مرد و ۷ زن می‌خواهیم ۵ نفر را انتخاب کنیم. (شامل ۳ مرد و ۲ زن) به چند طریق می‌توان این کار را انجام داد؟

$$\binom{۱۰}{۳}\times\binom{۷}{۲} = \frac{۱۰\times۹\times۸}{۳\times۲\times۱}\times\frac{۷\times۶}{۲\times۱} = ۲۵۲۰$$

مثال ۲۶) به چند طریق می توان از بین ۱۰ سوال به ۷ سوال پاسخ داد که حداقل به ۳ سوال از ۴ سوال اولش پاسخ داده باشیم؟

۳-۲ چند ترکیب مهم!

$$\binom{n}{0}=\binom{n}{n}=1 \quad , \quad \binom{n}{1}=\binom{n}{n-1}=n \quad , \quad \binom{n}{2}=\binom{n}{n-2}=\frac{n(n-1)}{2}$$

$$\binom{4}{3}=\binom{4}{1}=4\ , \quad \binom{5}{2}=\binom{5}{3}=10$$

$$\binom{6}{3}=20\ ,\ \binom{7}{3}=35\ ,\ \binom{8}{3}=56\ ,\ \binom{9}{3}=84\ ,\ \binom{10}{3}=120$$

$$\binom{8}{4}=70$$

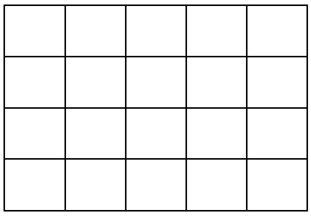
مثال ۲۷) به چند طریق میتوان از میان یک جمع ۱۲ نفره شامل ۷ مرد و ۵زن ، یک گروه ۸ نفره را تشکیل داد که حداقل یک و حداکثر چهار نفر از اعضای آن زن باشند؟

$$\binom{۵}{۱}\binom{۷}{۷}+\binom{۵}{۲}\binom{۷}{۶}+\binom{۵}{۳}\binom{۷}{۵}+\binom{۵}{۴}\binom{۷}{۴}$$

$$۵\times۱ + ۱۰\times۷ + ۱۰\times۲۱ + ۵\times۳۵ = ۴۶۰$$

تذکر ۵) **تعداد مستطیل های درون یک صفحه شطرنج $m \times n$ از رابطه $\binom{m+۱}{۲}\binom{n+۱}{۲}$ بدست می‌آید. همچنین تعداد مربع‌های موجود از رابطه زیر بدست می‌آید:**

$$m \times n+(m-۱)\times(n-۱)+...(m-n+۱)\times ۱ \to n \times n \to n^۲+(n-۱)^۲+...+۱^۲=\frac{n(n+۱)(۲n+۱)}{۶}$$



۳-۳ ترکیبات شامل و فاقد

۱- r شی از n شی که شامل x تای بخصوصی باشد: $\binom{n-x}{r-x}$

۲- r شی از n شی که فاقد y شی از n شی : $\binom{n-y}{r}$

۳- r شی از n شی که شامل x شی و فاقد y شی : $\binom{n-x-y}{r-x}$

حفظ نکنید!!!!!!!!!!

با مثال زیر این مفهوم را برای همیشه به خاطر بسپارید!
در یک کلاس ۱۰ نفره می‌خواهیم گروهی ۴ نفره تشکیل دهیم. تعداد حالات انجام این کار:

۱- در حالت کلی ←

۲- امیر و علی باشند ←

۳- محمد نباشد ←

۴- رضا و محمد نباشد و امیر و علی باشند ←

مثال ۲۸) به چند طریق می‌توان از میان ۱۲ نفر ، ۴ نفر را انتخاب نمود، هرگاه ۲ نفر از آنها نخواهند باهم در این گروه ۴ نفره مشارکت کنند؟

حالت	A	B
I	×	√
II	√	×
III	×	×
IV	√	√

مستقیم: $\binom{۱۰}{۳}+\binom{۱۰}{۳}+\binom{۱۰}{۴}=۴۵۰$

متمم: $\binom{۱۲}{۴}-\binom{۱۲-۲}{۴-۲}=۴۵۰$

تذکر ۶) **بدانید که در مسائلی که محاسبه مستقیم صورت سوال کار دشوار یست، متمم زدن جوابه!**

مثال ۲۹) با ۱۰ نقطه که ۵ تا از آن ها روی یک خط واقع اند، چند مثلث می‌توان ساخت؟

مثال ۳۰) به چند طریق می‌توان ۴ لنگه کفش را از میان ۶ جفت کفش انتخاب نمود که در بین آن‌ها هیچ جفت کفشی متعلق به هم نباشند؟ (۲ روش)

$$\binom{۶}{۴}\times(۲\times۲\times۲\times۲)=۲۴۰$$

$$\frac{۱۲\times۱۰\times۸\times۶}{۴!}=۲۴۰$$

یک نکته خوف! هر گاه در این فصل یک حاصل ضرب به شکل کاهشی دارید

یک مساله مهم در قسمت متفرقه

۳-۴ رابطه تبدیل و ترکیب

فرض کنید که چهار حرف ABCD را در اختیار داریم که به سه حرف نیاز داریم:

نگرش ترکیب : $\binom{۴}{۳}=۴$ ABC, ACD, BCD, ABD

نگرش تبدیل : $۴\times۳\times۲=۲۴$

پس می‌توان گفت، تبدیل = ترکیب + جابجایی $\binom{۴}{۳}\times۳!=۴\times۶=۲۴$

۳-۵ اتحادهای ترکیباتی (تفسیر در متفرقه !)

1. $\binom{n}{k}=\binom{n}{n-k} \Rightarrow \binom{12}{5}=\binom{12}{\ }$

2. $\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+........+\binom{n}{n}=2^n$

3. $\binom{n}{k}+\binom{n}{k-1}=\binom{n+1}{k} \Rightarrow \binom{6}{3}+\binom{6}{2}=\binom{7}{3}$

4. $0\times\binom{n}{0}+1\times\binom{n}{1}+........+n\times\binom{n}{n}=n2^{n-1}$

5. $\binom{n}{0}^2+\binom{n}{1}^2+........+\binom{n}{n}^2=\binom{2n}{n}$

6. $\binom{2}{2}+\binom{3}{2}+........+\binom{n}{2}=\binom{n+1}{3}$ or $\binom{k}{k}+\binom{k+1}{k}+........+\binom{n}{k}=\binom{n+1}{k+1}$

مثال ۳۱) به چند طریق می‌توان از بین ۱۰ دانش آموز گروهی تشکیل داد که حداقل ۳ عضو داشته‌باشد؟

$$\binom{۱۰}{۳}+\binom{۱۰}{۴}+\dots+\binom{۱۰}{۱۰}=۲^{۱۰}-\left(\binom{۱۰}{۰}+\binom{۱۰}{۱}+\binom{۱۰}{۲}\right)=۹۶۸$$

مثال ۳۲) حاصل $\binom{m-۱}{k-۱}+\binom{m-۲}{k-۱}+\binom{m-۳}{k-۱}+\binom{m-۳}{k}$ را ساده سازی نمائید؟

مثال ۳۳) حاصل $\binom{۱۱}{۰}+\binom{۱۱}{۲}+\binom{۱۱}{۴}+\dots\dots+\binom{۱۱}{۱۰}$ را بیابید.(نکته بسیار مهم)

$$\binom{۱۱}{۰}=\binom{۱۱}{۱۱},\binom{۱۱}{۱}=\binom{۱۱}{۱۰},\binom{۱۱}{۲}=\binom{۱۱}{۹},\binom{۱۱}{۳}=\binom{۱۱}{۸},\binom{۱۱}{۴}=\binom{۱۱}{۷},\binom{۱۱}{۵}=\binom{۱۱}{۶}$$

$$\binom{۱۱}{۰}+\binom{۱۱}{۱}+\binom{۱۱}{۲}+\binom{۱۱}{۳}+\binom{۱۱}{۴}+\binom{۱۱}{۵}+\binom{۱۱}{۶}+\binom{۱۱}{۷}+\binom{۱۱}{۸}+\binom{۱۱}{۹}+\binom{۱۱}{۱۰}+\binom{۱۱}{۱۱}=۲^{۱۱}$$

$$۲\left(\binom{۱۱}{۰}+\binom{۱۱}{۲}+\binom{۱۱}{۴}+\binom{۱۱}{۶}+\binom{۱۱}{۸}+\binom{۱۱}{۱۰}\right)=۲^{۱۱}\rightarrow$$

$$\binom{۱۱}{۰}+\binom{۱۱}{۲}+\binom{۱۱}{۴}+\binom{۱۱}{۶}+\binom{۱۱}{۸}+\binom{۱۱}{۱۰}=\binom{۱۱}{۱}+\binom{۱۱}{۳}+\binom{۱۱}{۵}+\binom{۱۱}{۷}+\binom{۱۱}{۹}+\binom{۱۱}{۱۱}=۲^{۱۰}=۱۰۲۴$$

4 چند کاربرد مهم

۴-۱ شمارش توابع

تعداد توابعی که از مجموعه n عضوی A به مجموعه m عضوی B می‌توان نوشت برابر m^n چراکه هر عضو دامنه شامل ... حالت هست که طبق اصل ضرب داریم:

$$m\times m\times\ldots\times m=m^n$$

مثال ۳۴) چند تابع از مجموعه $A=\{۱,۲,۳\}$ می‌توان به مجموعه $B=\{۴,۵,۶,۷\}$ نوشت طوریکه $f(۱)=۴$ باشد؟

مثال ۳۵) اگر $A=\{a,b,c,d,e\}$ و $B=\{۱,۲,۳\}$ باشند. با فرض $f(a)\neq۲, f(c)\neq۱$ چند تابع از مجموعه A به مجموعه B وجود دارد؟

۱) ۵۴ ۲) ۱۰۸ ۳) ۳۶۰ ۴) ۷۲۹

۴-۲ تعداد زیرمجموعه ها

تعداد زیر مجموعه های k عضوی یک مجموعه n عضوی برابر تعداد حالت‌های انتخاب k عضو از n عضو یعنی $\binom{n}{k}$ می‌باشد. داریم : $\binom{n}{۰}+\binom{n}{۱}+\binom{n}{۲}+....+\binom{n}{n}=۲^n$

مثال ۳۶) مجموعه اعداد طبیعی ۱ تا ۹ را در نظر بگیرید و به سوالات زیر جواب دهید

تعداد زیرمجموعه های ۴ عضوی آن چندتاست؟ $\binom{۹}{۴}=۱۲۶$

تعداد زیرمجموعه های ۵ عضوی آن چندتاست؟ $\binom{۹}{۵}$

تعداد زیرمجموعه های ۴ عضوی شامل عدد ۵ آن چندتاست؟ $\binom{۸}{۳}$

تعداد زیرمجموعه های ۴ عضوی شامل عدد ۵ و فاقدعدد ۶ چندتاست؟ $\binom{۷}{۳}$

مثال ۳۷) در چه تعداد از زیرمجموعه‌های اعداد طبیعی یک تا نه، حداقل یکی از اعداد ۱ و ۲ هستند و همچنین حداقل یکی از اعداد ۶ و ۷ و ۸ و ۹ نیستند؟

جواب = ۳۶۰

۴-۳ مقسوم علیه‌های یک عدد

مثال ۳۸) عدد ۷۲۰۰۰ چند مقسوم علیه مثبت دارد؟ این عدد چند مقسوم علیه بخشپذیر بر ۶۰ دارد؟

$۷۲۰۰۰=۵^۳\times۳^۲\times۲^۶\Rightarrow۵^{\bigcirc}\times۳^{\square}\times۲^{\Delta}$

$\bigcirc: ۰-۳\rightarrow۳+۱,\ \square\rightarrow۲+۱\ ,\ \Delta=۶+۱ \quad\Rightarrow\quad (۶+۱)\times(۲+۱)\times(۳+۱)=۸۴$

$۶۰=۲^۲\times۳^۱\times۵^۱\Rightarrow۵^{\bigcirc}\times۳^{\square}\times۲^{\Delta}\Rightarrow\begin{cases}\bigcirc=\\ \square=\\ \Delta=\end{cases}$

تذکر ۱) به طور کلی عدد $A=p_۱^{\alpha_۱}\times p_۲^{\alpha_۲}....\times p_n^{\alpha_n}$ که در آن $p_۱,p_۲,....,p_n$ اعداد اول متمایزند، تعداد مقسوم علیه هایش $(\alpha_۱+۱)\times(\alpha_۲+۱)....\times(\alpha_n+۱)$ است.

۴-۴ بخش پذیری

مثال ۳۹) در مجموعه $S=\{۱,۲,۳,\dots,۲۰۰\}$ چند عدد وجود دارد که بر ۳ بخش‌پذیر باشد ولی بر ۵ بخش‌پذیر نباشد؟

$$|A|=۱\le ۳k\le ۲۰۰\Rightarrow ۰/۳۳۳۳\le k\le ۶۶/۶۷\Rightarrow ۱\le k\le ۶۶$$

$$|A\cap B|=۱\le ۱۵k\le ۲۰۰\Rightarrow \frac{۱}{۱۵}\le k\le ۱۳/۳۳\Rightarrow ۱\le k\le ۱۳$$

$$|A-B|=|A|-|A\cap B|=۶۶-۱۳=۵۳$$

مثال ۴۰) در مجموعه $S=\{۱۰۱,۱۰۲,\dots,۴۰۰\}$ چند عدد وجود دارد که حداقل بر یکی از اعداد ۳ یا ۵ بخش‌پذیر می‌باشد؟

$$|A\cup B|=|A|+|B|-|A\cap B|$$

$$|A|=۱۰۱\le ۳k\le ۴۰۰\Rightarrow \frac{۱۰۱}{۳}\le k\le \frac{۴۰۰}{۳}\Rightarrow ۳۳/\dots\le k\le ۱۳۳/\dots\Rightarrow ۳۴\le k\le ۱۳۳$$

$$|B|=۱۰۱\le ۵k\le ۴۰۰$$

$$|A\cap B|=۱۰۱\le ۱۵k\le ۴۰۰$$

یک مثال دیگر در متفرقه

5 گروه بندی

مثال ۴۱) به چند طریق می‌توان ۱۲ نفر را به گروه‌های ۴ نفره A, B, C تقسیم نمود؟

$$\binom{۱۲}{۴}\binom{۸}{۴}\binom{۴}{۴}=\frac{۱۲!}{۴!۴!۴!}$$

مثال ۴۲) مسأله بالا را در حالت ۳ گروه بدون نام‌گذاری پاسخ دهید؟

$$\frac{\binom{۱۲}{۴}\binom{۸}{۴}\binom{۴}{۴}}{۳!}$$

مثال ۴۳) ۱۲ نفر را به چند طریق می‌توان به گروه‌های ۳ و ۴ و ۵ نفره تقسیم نمود؟

$$\binom{۱۲}{۵}\binom{۷}{۴}\binom{۳}{۳}=\binom{۱۲}{۳}\binom{۹}{۵}\binom{۴}{۴}=\frac{۱۲!}{۵!۴!۳!}$$

مثال ۴۴) ۴ مرد و ۴ زن را به چند طریق می‌توان به ۴ گروه ۲ نفره تقسیم نمود که در هر گروه یک مرد و یک زن باشد ؟ (اگر گروه با نام‌گذاری بود چه میشد؟)

6 مسائل بیشتر

مثال ۴۵) با ارقام ۰، ۲، ۳، ۶، ۸، ۹ چند عدد به فرم $\overline{xyzw}$ با شرط $w<z<y<x$ می‌توان ساخت ؟

مثال ۴۶) احمد و مصطفی و محمد بهمراه ۳ دانش‌آموز دیگر به چند طریق می‌توانند وارد کلاس شوند که احمد قبل محمد و محمد قبل مصطفی وارد شوند؟

مثال ۴۷) با حروف کلمه TEHRAN چند کلمه ۶ حرفی می‌توان ساخت که:

۱- حرف R دقیقاً بعد از E بیاید $۵!$

۲- حرف R بعد از E بیاید $\frac{۶!}{۲}$

۳- حرف R بعد از E و دقیقاً یک حرف بینشان فاصله باشد $\binom{۴}{۱}\times ۴!=۹۶$

مثال ۴۸) با ارقام عدد ۳۴۴۵۵ چند عدد ۴ رقمی می‌توان نوشت؟

تذکر ۸) بسیار مهم: تبدیل k شی از n شی برابر است با تبدیل n شی از n شی!!!!!

مثال ۴۹) با ارقام ۵ و ۴ و ۳ و ۲ و ۱ و ۰ چند عدد ۳ رقمی زوج و بدون تکرار ارقام می توان نوشت؟ (بحث مهم اشتراک موضوعی)

مثال ۵۰) تاسی را آنقدر پرتاب می‌کنیم که برای سومین بار عدد ۱ ظاهر می‌گردد. چند حالت وجود دارد که کلا ۷ بار پرتاب کرده باشیم ؟

$$\binom{۶}{۲}\times ۵\times ۵\times ۵\times ۵\times ۱\times ۱\times ۱=۳\times (۵^{۵})$$

مثال ۵۱) در یک خانواده‌ای ۶ فرزندی در چند حالت حداقل ۳ تای آن‌ها دختر هستند؟

$$2^6-\binom{6}{0}-\binom{6}{1}-\binom{6}{2}=64-1-6-15=42$$

مثال ۵۲) مادری دارای ۶ فرزند است. در چند حالت سومین فرزند دختر، فرزند پنجم است؟

$$\underbrace{-\ -\ -\ -}_{2g}\ \underset{g}{\overset{1}{-}}\ \underset{?}{\overset{2}{-}} \quad\Rightarrow\quad \binom{4}{2}\times1\times2=12$$

مثال ۵۳) کیسه‌ای شامل ۳ مهره قرمز و ۴ مهره آبی است :

a) به چند طریق می‌توان ۲ مهره خارج کرد که هر دو آبی باشند؟ $\binom{4}{2}=6$

b) اگر یکی پس از دیگری و بدون جای‌گذاری مهره ها را خارج کنیم جواب قسمت قبلی چه تغییری می کند ؟ $\binom{4}{1}\binom{3}{1}=12$

c) اگر یکی پس از دیگری و با جای‌گذاری مهره ها را خارج کنیم جواب قسمت قبلی چه تغییری می کند ؟ $\binom{4}{1}\binom{4}{1}=16$

مثال ۵۴) کیسه‌ای شامل ۵ مهره آبی و ۴ مهره قرمز است، به چند طریق می‌توان ۳ مهره خارج کرد:

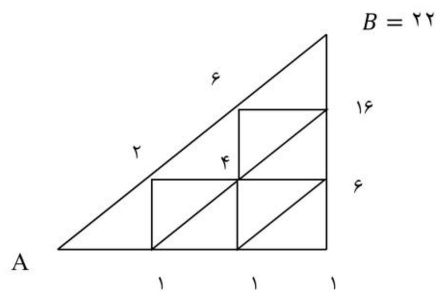
a) هرسه همرنگ — ۳ آبی یا ۳ قرمز — $\binom{4}{3}+\binom{5}{3}$

b) سه مهره همرنگ نباشند — کل منهای قسمت قبلی ! — $\binom{9}{3}-\binom{4}{3}-\binom{5}{3}$

c) حداقل یک مهره آبی — کل منهای هیچ آبی ! — $\binom{9}{3}-\binom{4}{3}$

d) حداکثر یک مهره آبی — هیچ آبی یا یک آبی — $\binom{4}{3}+\binom{4}{2}\binom{5}{1}$

مثال ۵۵) در شکل مقابل فقط حرکات → یا ↑ یا ↗ از A به B مجاز است. چند راه برای رسیدن از A به B موجود است؟



مثال ۵۶) با ارقام ۶، ۵، ۴، ۲، ۲، ۰، ۰، ۰ چند عدد ۷ رقمی می توان ساخت؟

۸ رقم ولی تبدیل ۷ تایی!!

$$\frac{۵ \times ۷!}{۳! \times ۲!}$$

مثال ۵۷) پنج نفر قرار است در ۴ اتاق متمایز یک هتل اسکان داشته باشند طوری که هیچ اتاقی خالی نماند. اسکان این ۵ نفر به چند طریق امکان پذیر است ؟

حل حرفه ای سوال :

$$\binom{۵}{۲} \times \binom{۴}{۱} \times ۳! = ۲۴۰$$

یک حل معمول بچه ها که ایراد دارد!

$$\binom{۵}{۴} \times ۴! \times \binom{۴}{۱} = ۴۸۰$$

تذکر : علاوه بر بررسی کل کتاب درسی حتما تمارین انتهای هر درس فصل را بررسی نمائید.

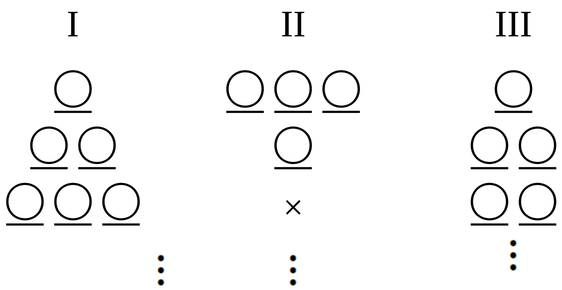
7 مسائل و موارد متفرقه (اختیاری)

۷-۱ قرار دادن n شی یکسان در k جعبه متمایز

سوال : به چند طریق می‌توان ۵ شی یکسان را در ۳ جعبه متمایز قرار داد؟

این سوال را می‌توان به مساله زیر تبدیل نمود

مسأله معادل: به چند طریق می‌توان ۲ خط (یک) را در ۷ مکان مختلف قرار داد یا ۵ صفر را در ۷ مکان مختلف قرار دارد؟



0 1 0 0 0 1 0

$$\binom{۷}{۲} = \binom{۷}{۵} \rightarrow \binom{n+k-۱}{n} = \binom{n+k-۱}{k-۱} = \binom{\ldots\ldots + \ldots\ldots + ۱}{\ldots\ldots - ۱}$$

مثال ۵۸) به چند طریق می توان با ۱۰ گل دسته گلی از میان گل‌های رز و مریم و بنفشه، پیچید؟ این مساله مشابه مساله زیر است

تعداد ریشه های صحیح و نامنفی معادله $x+y+z=۱۰$ چند تا است؟

$$\binom{۱۰+۳-۱}{۱۰} = \binom{۱۲}{۱۲} = \frac{۱۲ \times ۱۱}{۲} = ۶۶$$

مثال ۵۹) به چند طریق می توان ۷ شی یکسان را بین ۳ نفر تقسیم کرد، طوریکه به هر کدام حداقل یکی برسد؟ اول مساله به هر کدام یک شی بدهیم ! پس ۴ شی داریم:

یا هر ۴ تا به یکی $\binom{3}{1} = 3$ + ۴ تا به ۲ نفر $\binom{3}{2} \times 3 = 9$ + ۴ تا به هر ۳ نفر $\binom{3}{1} = 3$ (۱۵=۳+۹+۳)

۲-۷ تفسیرات اتحاد های ترکیبیاتی

1. $\binom{n}{k}=\binom{n}{n-k} \Rightarrow \binom{12}{5}=\binom{12}{\;}$

2. $\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\dots\dots+\binom{n}{n}=2^n$

3. $\binom{n}{k}+\binom{n}{k-1}=\binom{n+1}{k} \Rightarrow \binom{6}{3}+\binom{6}{2}=\binom{7}{3}$

4. $0\times\binom{n}{0}+1\times\binom{n}{1}+\dots\dots+n\times\binom{n}{n}=n2^{n-1}$

5. $\binom{n}{0}^2+\binom{n}{1}^2+\dots\dots+\binom{n}{n}^2=\binom{2n}{n}$

6. $\binom{2}{2}+\binom{3}{2}+\dots\dots+\binom{n}{2}=\binom{n+1}{3} \quad or \quad \binom{k}{k}+\binom{k+1}{k}+\dots\dots+\binom{n}{k}=\binom{n+1}{k+1}$

تفسیر شماره ۱ : فرض کنید ۵ خودکار مختلف داریم، در تمام حالاتی که ۲ خودکار مختلف انتخاب میکنیم، ۳ خودکار انتخاب نمی شوند یعنی خودبخود هر انتخاب ۲ خودکار متمایزی، یک نوع انتخاب متمایز از ۳ خودکار هم هست (همان ۳ خودکاری که انتخاب نشدند!) پس ترکیب ۲ از ۵ برابر است با ترکیب ۳ از ۵ !

تفسیر شماره ۲ : می دانیم تعداد کل زیرمجموعه های یک مجموعه n عضوی برابر است با 2^n ، چرا که هر عضو یا در زیر مجموعه حضور دارد یا نه یعنی دو حالت دارد و n عضو داریم و هر کدام ۲ حالت دارند که با اصل ضرب به 2^n می رسیم . نگاه دیگر این است که زیرمجموعه ها از صفر عضوی (تهی) شروع می شوند و یک عضوی و دو عضوی تا n عضوی (خود مجموعه زیر مجموعه خودش است !) یعنی یا صفر عضوی یا یک عضوی یا .... یا n عضوی و تعداد هر حالت هم به کمک ترکیب بدست می آید چرا که برای مثلا زیرمجموعه دو عضوی بایستی ۲ عضو از n عضو انتخاب شود. حال چون از لفظ ((یا)) استفاده شده به کمک اصل جمع تساوی شماره ۲ استدلال می گردد!

تفسیر شماره ۳ : مثال عددی داده شده را استدلال می کنیم : فرض کنید ۷ نفر مختلف دارید که یکی از آن ها امیر است و قصد دارید ۳ نفر انتخاب کنید : دو حالت وجود دارد: یا امیر در بین ۳ نفر است یا امیر در انتخاب های شما نیست : اولی $\binom{6}{2}$ حالت و دومی $\binom{6}{3}$ حالت دارد و چون از لفظ ((یا)) استفاده شده است باید دو عدد را جمع کنیم که قطعا برابر است با تعداد کل حالات انتخاب ۳ نفر از ۷ نفر یعنی $\binom{7}{3}$.

تفسیر شماره ۴ : برای استدلال این موضوع به تست زیر که از سری تست های جمعبندی خودمان است دقت کنید!

۲۵- در یک مسابقه ی دو ماراتن که بین ده نفر برگزار می شود به تمام کسانی که به خط پایان می رسند یک دسته گل اهدا می شود و به نفر اول جایزه ای جداگانه تعلق می گیرد. این جوایز را به چند طریق می توان تقسیم کرد؟ (دقت گردد تعداد افرادی که به خط پایان می رسند یک تا ۱۰ نفر می باشد)

۱) ۵۱۱۰ ۲) ۵۱۲۰ ۳) ۴۱۱۰ ۴) ۴۱۲۰

برای حل، دو راه داریم :

راه ۱ : یا یک نفر به خط پایان می رسد که خودش هم قطعا اول می شود که کافیست فقط یک نفر از ۱۰ نفر را انتخاب کنیم . یا دو نفر به خط پایان می رسند (تا اینجا ترکیب ۲ از ۱۰) و همچنین چون دونفرند برای نفر اول دو حالت داریم و ضرب می شود و همین طور ادامه می دهیم تا ۱۰ نفر به خط پایان برسند یعنی :

$$1\times\binom{10}{1}+2\times\binom{10}{2}+3\times\binom{10}{3}+....+10\times\binom{10}{10}=5120$$

راه ۲ : در هرصورت چون یک نفر اول می شود برای این جایگاه ۱۰ حالت داریم و ۹ نفر دیگر یا به خط پایان می رسند یا نمی رسند ! پس داریم :

$$10\times 2^{10-1}=5120$$

قطعا این دو عدد باید برابر باشند و این موضوع اتحاد شماره ۴ را استدلال می کند.

تفسیر شماره ۵ : فرض کنید دو گروه ۵ نفره داریم از پایه اول و دوم . در کل ۱۰ نفر داریم و قصد داریم ۵ نفر از بین آنها انتخاب کنیم. حالات را دسته بندی می کنیم :

۵ پایه اولی و صفر پایه دومی یا ۴ پایه اولی و ۱ پایه دومی یا ۳ پایه اولی و ۲ پایه دومی یا ۲ پایه اولی و ۳ پایه دومی یا ۱ پایه اولی و ۴ پایه دومی یا صفر پایه اولی و ۵ پایه دومی :

$$\binom{5}{5}\times\binom{5}{0}+\binom{5}{4}\times\binom{5}{1}+\binom{5}{3}\times\binom{5}{2}+\binom{5}{2}\times\binom{5}{3}+\binom{5}{1}\times\binom{5}{4}+\binom{5}{0}\times\binom{5}{5}=$$

$$\binom{5}{0}\times\binom{5}{0}+\binom{5}{1}\times\binom{5}{1}+\binom{5}{2}\times\binom{5}{2}+\binom{5}{3}\times\binom{5}{3}+\binom{5}{4}\times\binom{5}{4}+\binom{5}{5}\times\binom{5}{5}=$$

$$\binom{5}{0}^2+\binom{5}{1}^2+\binom{5}{2}^2+\binom{5}{3}^2+\binom{5}{4}^2+\binom{5}{5}^2$$

دقت شود خط دوم از خط اول به کمک اتحاد شماره ۱ نوشته شده و دقت کنید جواب کلی مساله می شود انتخاب ۵ از ۱۰ پس باید این دو جواب برابر باشند یعنی داریم :

$$\binom{5}{0}^2+\binom{5}{1}^2+\binom{5}{2}^2+\binom{5}{3}^2+\binom{5}{4}^2+\binom{5}{5}^2=\binom{10}{5}$$

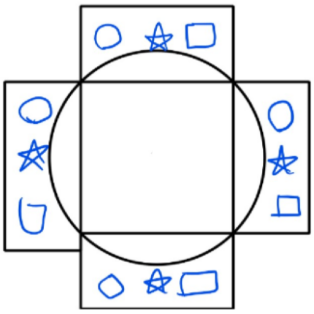
تفسیر شماره ۶: با شما ! : جایزه دارد مساله ای طرح کنید مثل موارد بالا که این مورد را استدلال کند!

استدلال کلی : از اتحاد شماره ۳ بروید و سمت راست جای k قرار دهید ۳ و سمت چپ آن را بنویسید و دائم این کار را تکرار کنید تا گسترش پیدا کند ...... !

و استدلال بهتر به کمک مساله نامساوی های توزیع اشیا یکسان در جعبه های متمایز است !

۳-۷ سایر مثال ها

مثـال ۶۰) با ۴ زوج قطعه طلا و نقره متفاوت ، چند گردنبند مختلف می‌توان ساخت که یک مروارید هم بین هر زوج خاص طلا و نقره قرار گیرد؟ (مروارید ها هم متفاوت هستند!)



$$\frac{(۴-۱)!}{۲}\times(۲!)^{۴}\times۴!$$

۴ بسته مستطیلی : دوری برگردان

جابجایی دایره و مربع ۲ حالت در ۴ مستطیل

جابجایی ستاره ها (مروارید) باهم

مثـال ۶۱) به چند طریق می توان از میان ۱ افسر و ۲ سرجوخه و ۳ سروان، ۴ نفر را انتخاب نمود و در یک صف قرار دارد که حتماً در این صف، افسر باشد؟

نوع مساله ای که باید دسته بندی کنید!

□ افسر

* سرجوخه

○ سروان

○ ○ ○ □ صفر سرجوخه

* ○ ○ □ یک سرجوخه

* * ○ □ دو سرجوخه

$$\frac{۴!}{۳!}+\frac{۴!}{۲!}\times۲=۲۸$$

مثـال ۶۲) مثال ۳۰ جزوه را در شرایطی حل کنید که فقط یک جفت کفش در بین کفش های انتخابی باشد؟(۲ روش)

$$\binom{۶}{۱}\times\binom{۵}{۲}\times(۲\times۲)=۲۴۰$$

$$\binom{۶}{۱}\times\frac{۱۰\times۸}{۲!}=۲۴۰$$

مثـال ۶۳) در مجموعه اعداد $S=\{۱,۲,۳,...,۲۵۰\}$ چند عدد وجود دارد که بر ۲ یا ۳ بخش‌پذیر بوده ولی بر ۵ بخش‌پذیر نباشد؟

A : بر ۲   B : بر ۳   C : بر ۵

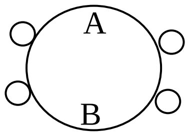
$$|(A\cup B)\cap\overline{C}|=(A\cap\overline{C})\cup(B\cap\overline{C})=|A\cap\overline{C}|+|B\cap\overline{C}|-|A\cap B\cap\overline{C}|$$

$$=|A|-|A\cap C|+|B|-|B\cap C|-|A\cap B|+|A\cap B\cap C|=...$$

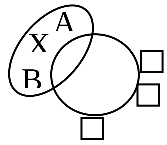
مثال ۶۴) ۶ نفر دور یک میز قرار دارند. (۱)به چند طریق دو فرد خاص A,B روبروی هم قرار دارند؟(۲) به چند طریق این دو نفر کنار هم هستند؟ (۳)به چند طریق بینشان فقط یک فاصله هست؟

$(۲)\ (۵-۱)!\times ۲!=۴۸$

$(۱)\ \ ۴!=۲۴$



$(۳)\ \ (۴-۱)!\times ۲!\times \binom{۴}{۱}=۴۸$



مثال ۶۵) با حروف کلمه دارا چند کلمه ۳ حرفی و چند کلمه ۴ حرفی می توان نوشت؟

۳ حرفی : دسته بندی : راا OR داا OR دار

$۳!+\frac{۳!}{۲!}\times ۲=۱۲$

۴ حرفی :

$\frac{۴!}{۲!}=۱۲$

باید هم یکی می شدند!!!

مثال ۶۶) با حروف کلمه انتشارات چند کلمه ۸ حرفی می توان نوشت که ۳ حرف تکراری آن کنار هم باشند؟

پاسخ : $\frac{۶!}{۲!}$

مثال ۶۷) به چند طریق می توان ۳ مهره یکسان را درون ۶ جعبه مختلف قرار داد که حداکثر درون هر جعبه یک مهره قرار گیرد؟

پاسخ : $\binom{۶}{۳}$

مثال ۶۸) به چند طریق می توان ۳ مهره رنگی متمایز را در ۶ جعبه مختلف قرار داد که حداکثر درون هر جعبه یکی قرار گیرد؟

$$\binom{۶}{۳}\times ۳!=(۶)_۳=\frac{۶!}{۳!}$$

مثال ۶۹) معادله $\binom{۱۰}{۲k-۳}=\binom{۱۰}{k-۲}$ را حل نمائید؟

$I)\, k-۲=۲k-۳\rightarrow k=۱\rightarrow k-۲=-۱\rightarrow \quad \times$

$II)\, (k-۲)+(۲k-۳)=۱۰\rightarrow k=۵\in N$

مثال ۷۰) به چند طریق می‌توان ۳ کتاب از بین ۵ کتاب سال اول و ۴ کتاب از ۶ کتاب سال دوم را به طور یک در میان چید؟

یک حالت یک در میانی بیشتر ندارند! $\binom{۵}{۳}\times ۳!\times \binom{۶}{۴}\times ۴!$

مثال ۷۱) چند عدد ۳ رقمی با ارقام متمایز و با استفاده از اعداد ۱، ۳، ۵، ۰، ۶، ۸ می‌توان ساخت که مضرب ۵ باشند؟

بحث اشتراک موضوعی – جواب آخر =۳۶

مثال ۷۲) به چند طریق می توان ۱۰ توپ مختلف با شماره های ۱ تا ۱۰ را در ۳ ظرف آبی و زرد و قرمز قرار دارد که در یکی ۴ توپ قرار گیرد و در دو ظرف دیگر هر کدام ۳ توپ قرار گیرد

۴توپ در کدام رنگ قرار گیرد : ترکیب یک از ۳ !

$$\frac{10!}{4!3!3!}\binom{3}{1}=\binom{3}{3}\binom{6}{3}\times\binom{10}{4}\times\binom{3}{1}$$

مثال ۷۳) با حروف کلمه دامغان چند کلمه ۴ حرفی می توان ساخت؟

۶ حرف ← تبدیل ۴ حرفی ← حالت بندی: در آخر طبق اصل جمع جواب آخر =۱۹۲

صفر الف: $4!=24$

یک الف : $\binom{4}{3}\times 4!=96$

دو الف: $\frac{\binom{4}{2}\times 4!}{2!}=72$

مثال ۷۴) به چند طریق می توان از بین ۷ جایزه متمایز، جوایزی برای فردی در نظر گرفته شود که این فرد حداقل ۲ جایزه ببرد؟

$$2^7-\binom{7}{0}-\binom{7}{1}=120$$

مثال ۷۵) در پرتاب ۳ تاس آبی و سبز و قرمز، در چند حالت عدد تاس آبی از سبز و تاس سبز از قرمز بزرگ تر است؟

$$\binom{6}{3}$$

مثال ۷۶) ۱۰ نفر در ۱۰ طبقه مختلف ساختمان از آسانسور خارج می گردند. در چند حالت فرد A در طبقه بالاتری از B و فرد B از C بالاتر پیاده می کردند؟ (۲ روش)

$$\frac{10!}{3!}=\binom{10}{3}\times 7!$$

مثـال ۷۷) هشت جفت کفش مختلف را درنظر بگیرید، اگر دو لنگه از بین آن ها انتخاب کنیم در چند حالت از یک جفت انتخاب نمی کردند؟ (۲ روش)

$$\binom{۱۶}{۲}-\binom{۸}{۱}=۱۱۲=\frac{۱۶\times۱۴}{۲!}$$

مثـال ۷۸) با ارقام ۵، ۴، ۳، ۲، ۱، ۰ چند عدد مطابق شرایط زیر می توان نوشت؟ (بحث اشتراک موضوعی)

الف) چهار رقمی

$$\underset{\cancel{۰}}{۵}\times ۵\times ۴\times ۳=\boxed{۳۰۰}$$

ب) چهار رقمی زوج

$$۵\times ۴\times ۳\times \underset{۰}{۱}=۶۰$$

$$۴\times ۴\times ۳\times \underset{۲,۴}{۲}=۹۶$$

$$۶۰+۹۶=\boxed{۱۵۶}$$

ج) سه رقمی فرد بزرگتر از ۲۰۰

$$\underset{۲,۳,۴,۵}{۴}\times ۴\times \underset{۱}{۱}=۱۶$$

$$\underset{۲,۴,۵}{۳}\times ۴\times \underset{۳}{۱}=۱۲$$

$$\underset{۲,۳,۴}{۳}\times ۴ \quad \underset{۵}{۱}=۱۲$$

$$۱۶+۱۲+۱۲=\boxed{۴۰}$$

مثـال ۷۹) با ارقام ۳، ۲، ۱ چند عدد ۵ رقمی می توان نوشت که حداقل یک بار از همه اعداد استفاده شود؟

مثـال ۸۰) یک تاس را ۱۰ بار می اندازیم. چند حالت وجود دارد که در پرتاب هفتم، سومین بار ۵ ظاهر گردد؟

$$\binom{۶}{۲}\times ۵^{۴}\times ۶^{۳}$$

مثال ۸۱) از ۷ پایه اولی و ۵ پایه دومی را به چند حالت می توان ۴ گروه ۲ نفره تشکیل داد که نفرات گروه هم پایه نباشند؟

$$\binom{۵}{۴}\times\binom{۷}{۴}\times ۴!$$

مثال ۸۲) از بین ۲۰ دانش آموز که در ۴ ردیف مساوی قرار دارند، به چند طریق می توان ۲ نفر را انتخاب نمود که همردیف باشند؟

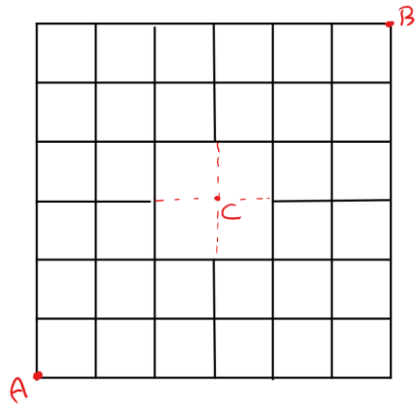
$$\binom{۴}{۱}\binom{۵}{۲}=۴۰$$

اگر سوال هم ردیف نبودن باشد، جواب چند خواهد شد ؟

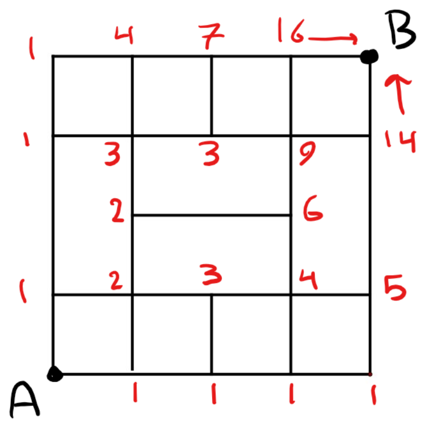
$$\binom{۴}{۲}\times ۵\times ۵=۱۵۰$$

مثال ۸۳) در شکل زیر به چند طریق میتوان روی خطوط رسم شده از A به B رفت طوریکه کوتاهترین مسیر ممکن طی شود؟

ابتدا کل جواب ها را باوجود c بشمارید و منهای حالتهایی کنید که از A به C و بعد به B می روید!

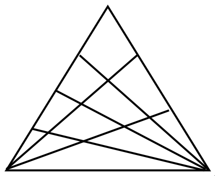


مثال ۸۴) در شکل مقابل فقط حرکت به راست و بالا مجاز است به چند حالت می توان از A به B رفت؟



$= 14 + 16 = 30$

۷-۴ ۶ مساله چالشی



مثال ۸۵) در شکل مقابل چند مثلث وجود دارد؟

پاسخ : $\binom{۴}{۱}\binom{۴}{۲}+\binom{۳}{۱}\binom{۵}{۲}-\binom{۱۲}{۱}=۴۲$

چرا ؟ ابتدا مثلث های با راس B را می شماریم که باید از چهار خط خارج شده از راس C یک خط را انتخاب کنیم و بعد از آن باید ۲ نقطه از ۴ نقطه موجود روی خط را انتخاب کنیم. همین کار را برای مثلث هایی که راس C دارند انجام می دهیم و سپس مثلث هایی که هر دو راس B و C را دارند را یکبار کم میکنیم چراکه دوبار شمارش شدند !

مثال ۸۶) به چند طریق می توان از A به B تابع صعودی تعریف کرد؟ $A=B=\{1,2,3\}$

تعریف تابع صعودی : $x_۲>x_۱\rightarrow f(x_۲)\geq f(x_۱)$

I برد تک عضوی: ← $\binom{۳}{۱}=۳$ $(۱,۱),(۲,۱),(۳,۱)$

II برد سه عضوی: ← $\binom{۳}{۳}=۱$ $(۱,۱),(۲,۲),(۳,۳)$

III برد دو عضوی: ← $\binom{۳}{۲}\times ۲=۶$ $\begin{cases}(۱,۱),(۲,۱),(۳,۲)\\(۱,۱),(۲,۲),(۳,۲)\end{cases}$

یا ← + : $۶+۳+۱=۱۰$

روش بهتر :

بد نیست بدانیم نوشتن تابع صعودی و یا نزولی مشابه قرار دادن اشیاء یکسان A در جعبه های متمایز B است. پس داریم :

$$\binom{۳+۳-۱}{۳-۱}=\binom{۵}{۲}=۱۰$$

مثال ۸۷) به چند طریق می توان ۹ کتاب یکسان را در ۵ قفسه متمایز جای داد به طوری که در هر قفسه حداقل یکی از آن ها قرار داده شود؟

۵ کتاب را در ۵ قفسه (هر قفسه یکی) ← ۴ کتاب ماند

حالت ۱ : چهار کتاب در یکی $\binom{۵}{۱}$

حالت ۲ : چهار کتاب در دو تا $۳\times\binom{۵}{۲}$

حالت ۳ : چهار کتاب در سه تا $۳\times\binom{۵}{۳}$

حالت ۴: چهار کتاب در چهار تا $\binom{۵}{۴}$

اصل جمع : $۵+۳۰+۳۰+۵=۷۰$

به کمک توزیع اشیا یکسان در جعبه ها هم میتوانید حل کنید !

مثال ۸۸) از یک گروه ۷ نفره از سربازان به چند طریق می توان یک دسته حداقل با یک نفر تشکیل داد که یک نفر به سمت ارشدی و یک نفر به سمت بی سیم چی منصوب کرد؟ (ارشد می توان بی سیم چی هم باشد)

جواب آخر = ۱۷۹۲

مثال ۸۹) بسط $(a-۲b+۳c)^{۵}$ چند جمله دارد ؟

جواب آخر = ۲۱

مثال ۹۰) شش نفر داریم که در بین آن ها ۳ برادر وجود دارد. به چند طریق می توان این نفرات را کنار هم قرار داد طوریکه ۲ برادر کنار هم باشند؟ (جایزه دارد!!)

۷-۵ مساله بسط ویژه علاقه مندان

$$(a+b)^n=\binom{n}{۰}a^n+\binom{n}{۱}a^{n-۱}b+\binom{n}{۲}a^{n-۲}b^۲+\ldots+\binom{n}{n-۱}a^۱b^{n-۱}\binom{n}{n}b^n$$

ضریب جمله $\frac{n!}{x!y!z!}$ $\quad x+y+z=n \quad a^x b^y c^z \quad (a+b+c)^n$

تعداد حالت جواب معادله = تعداد جملات = قرار دادن n شی یکسان (عدد یک) در ۳ جعبه و ..

$۳+۰+۰=۳$	$۰+۰+۳=۳$
$۲+۱+۰=۳$	$۱+۰+۲=۳$
$۲+۰+۱=۳$	$۰+۳+۰=۳$
$۱+۱+۱=۳$	$۰+۲+۱=۳$
$۱+۲+۰=۳$	$۰+۱+۲=۳$

$$(a_۱+a_۲+\cdots+a_m)^n$$

$$a_۱^{x_۱}+a_۲^{x_۲}+\cdots+a_m^{x_m}$$

$$x_۱+x_۲+\cdots+x_m=n \qquad \binom{n+m-۱}{m-۱}$$

8 کاردرخانه

9 یادداشت

AMIRVAFAEI6

امیر وفائی

مدرس ریاضیات دوره دوم متوسطه از پایه تا کنکور - متخصص هر دو رشته ریاضی و تجربی

طراح سوالات همه شاخه های ریاضی کانون فرهنگی آموزش (قلمچی)

رتبه ۲۶ کنکور سراسری

نفر اول دوره کارشناسی و کارشناسی ارشد مهندسی عمران دانشگاه صنعتی شریف

پذیرفته شده دوره دکتری مستقیم مهندسی عمران دانشگاه صنعتی شریف

رکوردار معدل دانشکده عمران دانشگاه صنعتی شریف از بدو تاسیس تا کنون

کسب عنوان دانشجوی نمونه دانشکده عمران و دانشگاه صنعتی شریف در سال ۱۳۹۴ و ۱۳۹۵

سابقه بیش از ۱۰ ترم استادیاری (دستیار استاد) در دروس مختلف تخصصی و عمومی دانشگاه صنعتی شریف

گذراندن دوره فرعی رشته ریاضی دانشگاه صنعتی شریف

استاد حل تمرین ریاضی دانشگاه صنعتی شریف

حضور در مدرسه شهیدبشهتی ۱ (تیزهوشان) از سال ۹۲ به عنوان مشاور و مدرس ریاضی

تالیف کتاب تا کنکور با همکاری مدرسه تیزهوشان

مبتکر برنامه های جمع بندی ویژه ۱۰۰-۱۰۰ در همه پایه ها با شباهت ۱۰۰ درصدی در کنکور سراسری

آموزش مفهومی و متفاوت درس ریاضی منطبق بر برنامه دقیق تدریس و آزمون و برنامه تست

مدرس رتبه های برتر (تک رقمی و دو رقمی)