



آموزش تخصصی ریاضیات

امیر وفائی

جزوات آموزش ریاضی

آمار و احتمال

فصل هفتم
ریاضی و تجربی ۱۰



 @vafaei_math

 AmirVafaei6

 0936 879 1709

 www.Donat.academy



فهرست مطالب

.....	فهرست مطالب	أ
.....	تعاریف اولیه	۱
.....	قوانین احتمال	۲
.....	پیشامد سازگار و ناسازگار	۳
.....	۳-۱ احتمال و نامساوی ها	۴
.....	مثال ها و نکات پایانی احتمال دهم	۴
.....	آمار	۵
.....	۵-۱ تعریف	۹
.....	۵-۱-۱ متغیرها	۱۰
.....	۵-۱-۲ پاسخ گزیده ای از تمرین کتاب بخش آمار	۱۱
.....	پیشامدهای مستقل (نگاه به آینده - یازدهم!)	۱۲
.....	متفرقه	۱۴
.....	۷-۱ متفرقه دهم	۱۴
.....	۷-۲ چند مطلب نه چندان کاربردی	۱۸
.....	کاردرخانه	۱۹
.....	یادداشت	۲۰



۱ تعاریف اولیه

- ۱- پدیده تصافی: آزمایشی است که نتیجه آن را به طور قطع قبل از وقوع نمی‌توان مشخص نمود. مثل پرتاب تاس یا پرتاب سکه و
- ۲- فضای نمونه: مجموعه تمام نتایج ممکن آزمایش بالا یا همان پدیده تصافی می‌باشد. معمولاً با نماد S نشان می‌دهند.
- ۳- پیشامد تصافی: هر زیر مجموعه از فضای نمونه‌ای را یک پیشامد از آن فضای نمونه‌ای گویند. تعداد پیشامد یک فضای نمونه‌ای برابر است با $2^{n(S)}$
- ۴- برآمد: به هر عضو فضای نمونه‌ای یک برآمد گویند، برآمد همان نتیجه حاصل از آزمایش کذایی می‌باشد.
- ۵- احتمال وقوع پیشامد: برای محاسبه احتمال از رابطه زیر استفاده نمائید.

$$p(A) = \frac{n(A)}{n(S)} \quad p(S) = 1 \quad p(\emptyset) = 0 \quad p(A') = 1 - p(A)$$

این نسبت همواره بین ۰ تا ۱ بیانگر پیشامد غیر ممکن تا حتمی می‌باشد!

مثال ۱ در پرتاب ۲ سکه، فضای نمونه‌ای را یادداشت نمائید؟

$\{PR, RP, PP, RR\}$

مثال ۲ برای پرتاب یک تاس فضای نمونه‌ای را بنویسید؟

$\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

مثال ۳ تاسی را پرتاب می‌کنیم و سپس به تعداد عدد رو شده سکه پرتاب می‌کنیم، فضای نمونه‌ای این آزمایش چند عضو است؟

$$\left\{ \begin{array}{l} 1 \rightarrow 2^1 = 2 \\ 2 \rightarrow 2^2 = 4 \\ 3 \rightarrow 2^3 = 8 \\ 4 \rightarrow 2^4 = 16 \\ 5 \rightarrow 2^5 = 32 \\ 6 \rightarrow 2^6 = 64 \end{array} \right. \rightarrow 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64 = 126$$

مثال ۴ فضای نمونه‌ای در انتخاب ۲ مهره از یک کیسه ۱۰ مهره‌ای چند عضو دارد؟

مثال ۵ در پرتاب ۳ سکه چند پیشامد وجود دارد؟

$$n(S) = 2^3 = 8 \rightarrow$$

مثال ۶ در پرتاب دو تاس، فضای نمونه‌ای چند عضو دارد؟

مثال ۷ در پرتاب یک تاس با چه احتمالی عدد رو شده، زوج است؟

مثال ۸ در پرتاب دو تاس سالم احتمال آنکه مجموع دو عدد رو شده بیش از ۶ نباشد چقدر است؟

$$\frac{1,1+2,2+3,3}{3}, \frac{1,2}{2}, \frac{1,3}{2}, \frac{1,4}{2}, \frac{1,5}{2}, \frac{2,3}{2}, \frac{2,4}{2}, \frac{3,4}{2} \Rightarrow P = \frac{15}{36} = \frac{5}{12}$$

مثال ۹ در ظرفی شامل ۳ مهره سیاه و ۵ مهره سفید و ۲ مهره قرمز، ۳ مهره به تصادف خارج می‌نمائیم. مطلوب است محاسبه احتمال:
۱- دو مهره سیاه و یک مهره قرمز باشد؟

۲- حداقل ۲ مهره سیاه باشد؟

۳- حداکثر دو مهره سفید باشد؟

۴- هر سه سیاه باشد؟

۵- هر سه همرنگ باشند؟

۶- هر سه ناهمرنگ؟

۷- حداقل دو تا ناهمرنگ باشند؟

مثال ۱۰ در سوال قبلی احتمال آن را بیابید که مهره اول و دوم سیاه باشد و مهره سوم قرمز باشد؟ (در این حالت مهره‌ها یکی پس از دیگری خارج می‌شوند!)



۲ قوانین احتمال

(الف) اجتماع دو پیشامد A, B : $A \cup B$: یکی از A یا B رخ دهد یا هر دو باهم رخ دهند.
(وقوع حداقل یکی از دو پیشامد) (لفظ یا)
$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$$

(ب) اشتراک دو پیشامد A, B : $A \cap B$: هر دو پیشامد باهم رخ دهند. (لفظ و)
$$p(A \cap B) = p(A) + p(B) - p(A \cup B)$$

(ج) تفاضل: $A - B$: A رخ دهد ولی B رخ ندهد (وقوع فقط A)
$$p(A - B) = p(A \cap B') = p(A) - p(A \cap B)$$

(د) تفاضل متقارن: $A \Delta B$: پیشامد A یا B رخ دهد ولی باهم رخ ندهند. (وقوع فقط A یا فقط B)
$$p(A \Delta B) = p(A - B) + p(B - A) = p(A \cup B) - p(A \cap B) = p(A) + p(B) - 2p(A \cap B)$$

(ه) متمم A : A' : رخ ندادن A (نه A)
$$p(A') = 1 - p(A)$$

(و) دومورگان: $p(A' \cup B') = 1 - p(A \cap B)$, $p(A' \cap B') = 1 - p(A \cup B)$

مثال ۱۱ اگر داشته باشیم $p(A \cap B) = \frac{1}{6}$, $p(B) = \frac{1}{4}$, $p(A) = \frac{2}{3}$, حاصل عبارت $\frac{p(A - B)}{p(A \Delta B)}$ را محاسبه کنید.

مثال ۱۲ از بین اعداد طبیعی ۱ تا ۱۰۰، عددی به تصادف انتخاب می کنیم. با کدام احتمال این عدد مضرب ۴ (A) یا مربع کامل (B) می باشد؟

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

$$A: 1 \leq 4k \leq 100 \rightarrow \frac{1}{4} \leq k \leq 25 \rightarrow 1 \leq k \leq 25 \rightarrow 25$$

$$B: 1 \leq k^2 \leq 100 \rightarrow 1 \leq k \leq 10 \rightarrow 10$$

$$\Rightarrow P(A \cup B) = \frac{n(A \cup B)}{n(S)} = \frac{25 + 10 - 5}{100} = 30\%$$

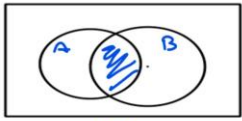
$$A \cap B: 1 \leq 4k^2 \leq 100 \rightarrow \frac{1}{4} \leq k^2 \leq 25 \rightarrow \frac{1}{2} \leq k \leq 5 \rightarrow 1 \leq k \leq 5 \rightarrow 5$$

مضرب ۷ و مربع کامل ???

مضرب ۱۲ و مربع کامل ??



۳ پیشامد سازگار و ناسازگار



سازگار



ناسازگار

هرگاه وقوع دو پیشامد با هم ممکن باشد $(A \cap B \neq \emptyset)$ ، دو پیشامد را سازگار گویند و هرگاه وقوع ناممکن داشته باشند $(A \cap B = \emptyset)$ آنها را ناسازگار می‌خوانیم.

برای مثال در پرتاب تاس

پیشامد A: عدد ظاهر شده زوج باشد، B: فرد بودن و C: بزرگتر از ۳ بودن داریم A, B ناسازگارند ولی B, C و همچنین A, C سازگارند!

مثال ۱۳ نشان دهید اگر $P(A') - P((A \Delta B)') = P(B - A)$ آن گاه دو پیشامد A, B ناسازگارند؟

$$\begin{aligned} P(A') - P((A \Delta B)') &= 1 - P(A) - (1 - P(A \Delta B)) = P(B - A) \\ \Rightarrow P(A \Delta B) - P(A) &= P(B - A) \Rightarrow P(A - B) + P(B - A) - P(A) = P(B - A) \\ \Rightarrow P(A - B) &= P(A) \Rightarrow P(A) - P(A \cap B) = P(A) \Rightarrow P(A \cap B) = 0 \Rightarrow \end{aligned}$$

۳-۱ احتمال و نامساوی ها

$$\begin{aligned} A \subseteq B &\rightarrow n(A) \leq n(B) \rightarrow p(A) \leq p(B) \\ A \cap B \subseteq A \subseteq A \cup B \subseteq S &\rightarrow p(A \cap B) \leq p(A) \leq p(A \cup B) \leq p(S) = 1 \\ p(A \cup B) &= p(A) + p(B) - p(A \cap B) \rightarrow p(A \cup B) \leq p(A) + p(B) \\ p(A \cup B) &= p(A) + p(B) - p(A \cap B) \leq 1 \rightarrow p(A) + p(B) - 1 \leq p(A \cap B) \\ p(A) + p(B) - 1 &\leq p(A \cap B) \leq \min\{p(A), p(B)\} \\ p(A) = 60\%, p(B) = 20\% &\rightarrow p(A \cap B) = ? \end{aligned}$$

مثال ۱۴ با فرض $n(A) \geq n(B)$ نشان دهید: $p(A) - p(B) \leq p(A - B) \leq p(A)$

$$\begin{aligned} 0 \leq P(A \cap B) &\leq P(B) \xrightarrow{x(-1)} -P(B) \leq -P(A \cap B) \leq 0 \\ \xrightarrow{+P(A)} &P(A) - P(B) \leq \underbrace{P(A) - P(A \cap B)}_{P(A-B)} \leq P(A) \end{aligned}$$

مثال ۱۵ اگر $P(A - B) = \frac{2}{5}, P(B - A) = \frac{1}{3}$ باشد، حداکثر مقدار $P(A) + P(B)$ کدام است؟

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P(A - B) + P(B - A) + P(A \cap B) \leq 1 \rightarrow \frac{1}{3} + \frac{2}{5} + P(A \cap B) \leq 1 \rightarrow P(A \cap B) \leq 1 - \frac{1}{3} - \frac{2}{5} = \frac{4}{15} \\ P(A) + P(B) &= P(A - B) + P(B - A) + 2P(A \cap B) = \frac{1}{3} + \frac{2}{5} + 2P(A \cap B) \\ \Rightarrow \max\{P(A) + P(B)\} &= \frac{1}{3} + \frac{2}{5} + 2 \max\{P(A \cap B)\} = \frac{1}{3} + \frac{2}{5} + 2\left(\frac{4}{15}\right) = \frac{19}{15} \end{aligned}$$

کلید طلایی حل اینگونه سوالات این است که





۴ مثال ها و نکات پایانی احتمال دهم

مثال ۱۶ عددی طبیعی به تصادف کوچکتر مساوی ۳۰۰ انتخاب می کنیم. مطلوب است

$$A : 3 \quad B : 5$$

محاسبه احتمال موارد زیر :

۱- مضرب ۳ یا ۵ باشد؟

$$|A| : 1 \leq 3k \leq 300 \rightarrow \frac{1}{3} \leq k \leq 100 \rightarrow 1 \leq k \leq 100$$

$$|B| : 1 \leq 5k \leq 300 \rightarrow \frac{1}{5} \leq k \leq 60 \rightarrow 1 \leq k \leq 60 \quad \Rightarrow p(A \cup B) = \frac{100 + 60 - 20}{300} = \frac{14}{30}$$

$$|A \cap B| : 1 \leq 15k \leq 300 \rightarrow \frac{1}{15} \leq k \leq 20 \rightarrow 1 \leq k \leq 20$$

۲- مضرب ۳ باشد اما مضرب ۵ نباشد؟

$$P(A - B) = p(A) - p(A \cap B) = \frac{100 - 20}{300} = \frac{8}{30}$$

۳- فقط مضرب ۳ یا فقط مضرب ۵ باشد؟

۴- نه مضرب ۳ و نه مضرب ۵ باشد؟

۵- مضرب ۳ و ۵ ، نباشد؟

مثال ۱۷ دو تاس سیاه و سفید را باهم پرتاب می‌نمائیم. مطلوب است محاسبه احتمال:

۱- مجموع ارقام برابر ۹ : $\frac{4}{36}$

۲- قدر مطلق تفاضل برابر ۲ : $\frac{8}{36}$

۳- مجموع بزرگتر از ۶ یا قدر مطلق تفاضل کوچک تر از ۲ : $\frac{16 + 21 - 9}{36} = \frac{28}{36} = \frac{7}{9}$

۴- حداقل یکی از دو تاس اول باشد اما هر دو اول نباشند : $\frac{3 \times 3 \times 2!}{36} = \frac{1}{2}$ یا $\frac{1}{2} = \frac{27 - 9}{36}$

۵- مجموع دو تاس حداکثر ۱۰ باشد

مثال ۱۸ در جعبه ای ۳ مهره سفید و ۵ مهره سیاه و ۲ مهره قرمز وجود دارد. مهره ای را به تصادف خارج کرده و بدون مشاهده رنگ آن، مهره دیگری خارج می کنیم، احتمال قرمز بودن دومی چقدر است؟

$$(B, R) \text{ یا } (W, R) \text{ یا } (R, R) \Rightarrow \left(\frac{5}{10} \times \frac{2}{9}\right) + \left(\frac{3}{10} \times \frac{2}{9}\right) + \left(\frac{2}{10} \times \frac{1}{9}\right) = \frac{1}{5}$$

تذکره ۱ جرج پولیا: هرگاه تعدادی مهره را بدون دقت به رنگ از جعبه خارج کنیم. میتوان برای

محاسبه احتمال مساله از فضای نمونه ای اولیه بدون کاهش ناآگاهانه استفاده نمود!!
 $\frac{2}{10} = \frac{1}{5}$

مثال ۱۹ مثال دیگر پولیا: در جعبه ای ۳ مهره سیاه و ۴ مهره قرمز و ۳ مهره سبز وجود دارد، ۴ مهره خارج میکنیم چقدر احتمال دارد دومی و چهارمی بترتیب سیاه و قرمز باشند؟ چون در خصوص مهره های اول و سوم صحبت نشده است، کلاً فکر میکنیم دومهره خارج شده و اولی سیاه باشد و دومی قرمز پس داریم:

مثال ۲۰ دو تاس سفید و یک تاس قرمز را پرتاب می کنیم. احتمال آنکه عدد تاس قرمز از عدد تاس سفید کوچکتر باشد چقدر است؟

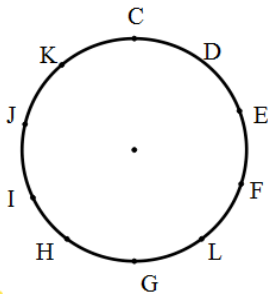
$$\left. \begin{array}{l} 1 \quad 6-2 \rightarrow 5 \times 5 = 25 \\ 2 \quad 6-3 \rightarrow 4 \times 4 = 16 \\ 3 \quad 6-4 \rightarrow 3 \times 3 = 9 \\ 4 \quad 6-5 \rightarrow 2 \times 2 = 4 \\ 5 \quad 6 \rightarrow 1 \times 1 = 1 \end{array} \right\} + = 55 \Rightarrow p = \frac{55}{6^3} = \frac{55}{216}$$

مثال ۲۱ سه بار یک تاس را پرتاب می کنیم احتمال آنکه هر بار عدد بزرگتری بیاید چقدر است؟

مثال ۲۲ یک تاس را ۳ بار پرتاب می کنیم احتمال آنکه فقط دوبار عدد یکسان ظاهر گردد، چقدر است؟

$$\frac{\binom{3}{2} \times 6 \times 1 \times 5}{6 \times 6 \times 6} = \frac{5}{12}$$

مثال ۲۳ جعبه ای شامل ۹ کارت به شماره های ۱ تا ۹ می باشد ۳ کارت به تصادف از این جعبه خارج می کنیم، احتمال آنکه مجموع فرد داشته باشند؟



مثال ۲۴ از میان ۱۰ نقطه متساوی الفاصله روی دایره ۴ نقطه به تصادف انتخاب می‌نمائیم احتمال آنکه دو نقطه خاص C,H روبروی هم قطر این ۴ ضلعی باشند، کدام است ؟

$$\frac{\binom{3}{1} \binom{5}{1}}{\binom{10}{4}}$$

مثال ۲۵ فردی در یک آزمون ۵ سوالی ۴ گزینه‌ای شرکت کرده و به تصادف به تمامی سوالات پاسخ می‌دهد. احتمال آنکه به ۳ سوال پاسخ صحیح دهد، چقدر است ؟

$$\binom{5}{3} \left(\frac{1}{4}\right)^3 \left(\frac{3}{4}\right)^2$$

مثال ۲۶ با ارقام متمایز ۴، ۳، ۲، ۱ و صفر، یک عدد ۵ رقمی ساخته شده، چقدر احتمال دارد زوج باشد؟

$$S = \frac{4}{\phi} \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 96$$

$$(I) \quad 4 \times 3 \times 2 \times 1 \times \frac{1}{2} = 24 \quad \Rightarrow P = \frac{24 + 36}{96} = \frac{60}{96}$$

$$(II) \quad 3 \times 3 \times 2 \times 1 \times \frac{2}{2,4} = 36$$

مثال ۲۷ کیسه ای شامل ۳ مهره سفید و ۴ سیاه و ۵ سبز است. اگر ۳ مهره انتخاب کنیم، با کدام احتمال هر سه مهره هم‌رنگ نیستند؟ (متمم هر سه هم‌رنگ!)

مثال ۲۸ در کیسه ای ۵ مهره سفید و ۴ سیاه و ۳ آبی وجود دارد سه مهره به تصادف خارج می‌کنیم با کدام احتمال رنگ مهره های خارج شده متفاوت است ؟ (یعنی هر سه ناهم رنگ!)

مثال ۲۹ هر یک از ارقام ۱ تا ۵ را روی پنج کارت یکسان نوشته شده است. به تصادف ۳ کارت از آن‌ها را کنار هم قرار می‌دهیم. با کدام احتمال عدد ۳ رقمی حاصل مضرب ۳ می‌باشد؟

جمع ارقام مضرب ۳ ← عدد مضرب ۳

$$n(S) = 5 \times 4 \times 3 = 60 \quad n(A) = 1, 2, 3 + 2, 3, 4 + 3, 4, 5 + 1, 3, 5 = 4 \times 3! = 24$$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{24}{60} = 40\%$$

مثال ۳۰ در یک خانواده ۴ فرزند با کدام احتمال ۲ فرزند پسر یا ۳ فرزند دختر است ؟

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) = \binom{4}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^4 + \binom{4}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{10}{16} = \frac{5}{8}$$

چون اشتراک نداشتند اینطور نوشتیم!!

مثال ۳۱ آمار نشان می دهد در یکی از شهر های بزرگ ، ۲۵ درصد جرایم در روز و ۱۸ درصد جرائم درون شهر صورت می گیرد. اگر تنها ۱۰ درصد جرائم در حومه شهر و در طول روز رخ دهد، در اینصورت :

الف) چند درصد جرائم در شهر و در طول روز رخ می دهند؟

$$P(A) = \frac{25}{100}, P(B) = \frac{18}{100}, P(A - B) = \frac{10}{100}$$

$$P(A \cap B) = ? \Rightarrow P(A - B) = P(A) - P(A \cap B) \rightarrow P(A \cap B) = P(A) - P(A - B) = \frac{15}{100}$$

ب) چند درصد جرائم در شهر و در طول شب رخ می دهند؟

$$P(B - A) = ? \Rightarrow P(B - A) = P(B) - P(A \cap B) = \frac{3}{100}$$

روش حل حرفه ای !!

شب	روز	
۱۸ - ۱۵ = ۳	۲۵ - ۱۵ = ۱۵	درون
؟	۱۰	حومه

مثال ۳۲ ۶۰ درصد مردم بلژیک تحصیل کرده اند و ۴۰ درصد تحصیل کرده های این کشور عینکی هستند. یکی از ساکنان این کشور به تصادف انتخاب شده است. احتمال اینکه این شخص تحصیل کرده باشد ولی عینکی نباشد، چقدر است ؟

مثال ۳۳ از بین ۱۵۰ نفر دانشجویان دانشکده فنی شریف، ۳۰ نفر اهل مازندران و ۲۰ نفر اهل گلستان و ۱۰ نفر اهل استان گیلان هستند. اگر دانشجویی به تصادف انتخاب گردد، چقدر احتمال دارد اهل یکی از این ۳ استان شمالی کشور باشد؟

$$\frac{30+20+10}{150} = \frac{6}{15} = 40\%$$

+مثال های متفرقه دهم!



۵ آمار

۵-۱ تعریف

تعریف آمار و علم آمار :

آمار، مجموعه‌ای از اعداد، ارقام و اطلاعات است. **علم آمار** مجموعه روش‌هایی است که شامل جمع آوری اعداد و ارقام، سازماندهی و نمایش، تحلیل و تفسیر داده‌ها و در نهایت نتیجه‌گیری، قضاوت و پیش‌بینی مناسب در مورد **پدیده‌ها و آزمایش‌های تصادفی** می‌شود.

تعریف جامعه یا جمعیت

مجموعه تمام افراد یا اشیایی که درباره یک یا چند ویژگی آنها تحقیق صورت گیرد، **جامعه** یا **جمعیت** نامیده می‌شود و هریک از این افراد یا اشیا را **عضو جامعه** می‌نامند.

تعریف اندازه یا حجم جامعه

تعداد اعضای جامعه را **اندازه جامعه** یا **حجم جامعه** گویند. به عنوان مثال، دانش‌آموزان یک مدرسه می‌توانند یک جامعه باشند و هریک از دانش‌آموزان مدرسه عضو این جامعه هستند.

تعریف نمونه

بخشی از جامعه را که برای مطالعه انتخاب شود، **نمونه** گویند و هریک از افراد یا اشیای انتخاب شده را **عضو نمونه** گویند.

تعریف اندازه یا حجم نمونه

تعداد اعضای نمونه را **اندازه نمونه** یا **حجم نمونه** گویند. به عنوان مثال دانش‌آموزان یک کلاس به عنوان یک نمونه از دانش‌آموزان مدرسه هستند و هریک از دانش‌آموزان کلاس، عضو نمونه محسوب می‌شوند.

تعریف متغیر و مقدار متغیر

متغیر، ویژگی از اعضای یک جامعه است که بررسی و مطالعه می‌شود و معمولاً از یک عضو به عضو دیگر تغییر می‌کند. عددی را که به ویژگی یک عضو نسبت داده می‌شود، **مقدار متغیر** می‌گویند.

۵-۱-۱ متغیرها

متغیرها به دو نوع کمی و کیفی تقسیم می شوند:

(۱) کمی

متغیری که قابل اندازه گیری باشد یا به عبارت دیگر متغیری است که مقادیر عددی می گیرد و بر روی آن اعداد عملیات ریاضی از قبیل جمع و تفریق و معدل گیری قابل انجام است. مثل وزن + قد + نمره + نمره چشم + سن افراد + زمان مطالعه + دما + این نوع خود به دو دسته گسسته و پیوسته تقسیم می شود. پیوسته: یعنی اگر متغیر دو مقدار a, b را بپذیرد، هر مقدار بین این دو عدد را هم بتواند بپذیرد. لازم به ذکر می باشد که متغیرهای گسسته چنین ویژگی ندارند.

(۲) کیفی

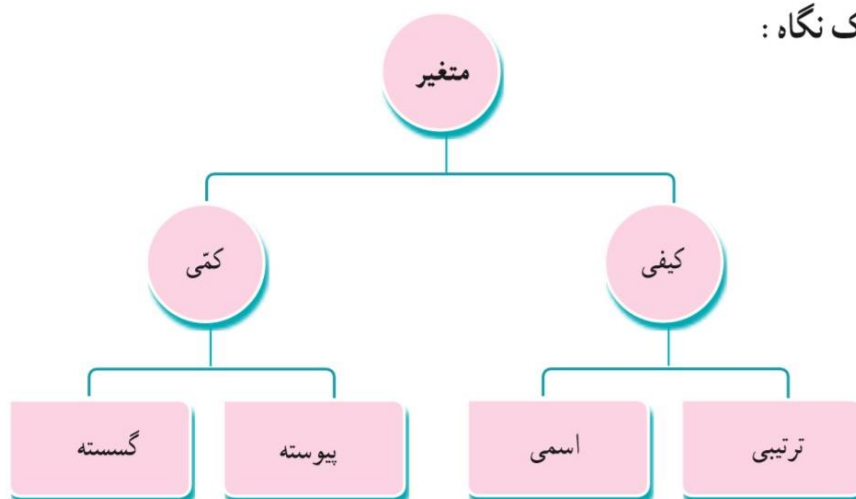
متغیری که کمی نباشد (قابل اندازه گیری نباشد)! به عبارت دیگر متغیری است که صرفاً برای دسته بندی افراد یا اشیا در گروه ها به کار می رود و لزوماً مقدار عددی نمی گیرد و اگر بگیرد نمی توان بر روی آن عملیات ریاضی انجام داد. که خود به دو دسته ترتیبی (اگر دارای یک ترتیب مشخص باشد) و اسمی (اگر دارای ترتیب مشخصی نباشد) تقسیم می شود.

ریزه کاری ها:

اگر کلمه **میزان** در کنار کلماتی چون (رضایت، سختی، لذت، علاقه مندی و ...) بیاید یک مفهوم کیفی دارد که می تواند کم، متوسط، زیاد، باشد، یعنی کیفی ترتیبی است.
اگر کلمه **میزان** در کنار کلماتی چون (مالیات، بارش، درآمد فروش، و ...) بیاید یک مفهوم عددی دارد و دقیقاً کمی پیوسته است.
متغیرهایی که فقط نوع آن ها معلوم هستند، کیفی اند.

تذکر ۲ ⚠️ مقام های یک ورزشکار حتی اگر با اعداد ۱ و ۲ و ۳ مشخص شوند باید کیفی ترتیبی باشد و کمی نیست چون اعداد بکاربرده شده قابل معدل گیری یا عملیات ریاضی نیست!

انواع متغیرها در یک نگاه:



شدت آلودگی:

۵-۱-۲ پاسخ گزیده ای از تمارین کتاب بخش آمار

نوع متغیرها را در نمودار زیر، دسته بندی کنید.

نوع متغیر	متغیر
کتر پیوسته	۱- میزان بارندگی برحسب سانتی متر در یک شهر
کیفر لاسر	۲- نوع بارندگی (باران، برف)
کتر گسته	۳- تعداد شهرهایی که در یک روز هوای آفتابی دارند
کتر پیوسته	۴- میزان دمای هوا
کیفر ترتیبی	۵- شدت آلودگی هوا (زیاد، متوسط، کم)
کیفر لاسر	۶- انواع وضعیت هوا (آفتابی، ابری، بارانی، برفی)
کیفر ترتیبی	۷- شدت بارندگی (زیاد، متوسط، کم)

جدول زیر متغیرهای دانش آموزان را نشان می دهد. انواع متغیرها از نظر کتی، کیفی، گسته، پیوسته، ترتیبی و اسمی را در جدول زیر کامل کنید.

متغیرهای دانش آموزان	متغیر کتی	متغیر کیفی	متغیر گسته	متغیر پیوسته	متغیر ترتیبی	متغیر اسمی
سن	×			×		
نمره ریاضی نهم	×		×			
جنسیت (دختر و پسر)		×				×
قد	×			×		
وزن	×			×		
میزان هوش (هوش بالا، متوسط، پایین)		×			×	
میزان رضایت در مدرسه (بسیار، متوسط، ضعیف)		×			×	
شناختن توده بدن	×			×		

تعداد مسافرخ تظار

فرض کنید وزن شخصی ۹۵ کیلوگرم و قد او $1/60$ سانتی متر باشد.

الف) شناختن توده بدن این شخص را حساب کنید.

$$\text{توده توده سینه} = \frac{95}{(1/6)^2} = 37/10$$

کدام جمله درست و کدام جمله نادرست است :

الف) اندازه جامعه کمتر از اندازه نمونه است **نادرست**

ب) اعضای نمونه، همان اعضای جامعه اند **نادرست**

بد نیست بدانیم ۱: (فرق آمار و احتمال)

علم آمار: شناختن جامعه نامعلوم، با استفاده از نمونه های جمع آوری شده معلوم است. (گذشته)
علم احتمال: بررسی یک نمونه نامعلوم (آینده) از یک جامعه ی معلوم است.

بد نیست بدانیم ۲: اصول کولموگروف (اصول احتمال)

احتمال رخ دادن پیشامد حتمی (S) برابر ۱ است: $P(S) = 1$

برای دو پیشامد ناسازگار A, B داریم: $p(A \cup B) = p(A) + p(B)$



۶ پیشامدهای مستقل (نگاه به آینده - یازدهم!)

دو پیشامد را مستقل گوئیم هرگاه:

۱- احتمال یکی بر دیگری تاثیری نداشته باشد.

۲- دو پیشامد بتوانند در یک لحظه رخ دهند.

$$۳- p(A \cap B) = p(A) \times p(B)$$

تذکر ۳ در اکثر موارد می توان عنوان نمود که دو پیشامد، فضای نمونه‌ای جدا از هم دارند!!!

پوشیدن لباس گرم در شهر ساری و تصادف در شهر تهران!!!

نتایج: برای دو پیشامد مستقل A و B :

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A)p(B)$$

$$p(A - B) = p(A) - p(A)p(B) = p(A)(1 - p(B)) = p(A)p(B') \rightarrow$$

$$p(B - A) = p(B) - p(A)p(B) = p(B)(1 - p(A)) = p(A')p(B) \rightarrow$$

$$p(A' \cap B') = 1 - p(A \cup B) = 1 - p(A) - p(B) + p(A)p(B)$$

$$= 1 - p(A) - p(B)(1 - p(A)) = (1 - p(A))(1 - p(B)) = p(A')p(B') \rightarrow$$

مثال ۳۴ امیر (A) و علی (B) مشغول تیراندازی می باشند. این دو نفر به ترتیب هر کدام

۶۰ و ۲۰٪ احتمال موفقیت در تیراندازی دارند. مطلوب است :

احتمال اصابت تیر به هدف ؟

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B) =$$

احتمال اینکه فقط علی موفق شود ؟

$$p(B - A) = p(B) - p(A \cap B) =$$

مثال ۳۵ احتمال آن را بیابید که از بین سه نفر علی و امیر و محمد، روز تولد حداقل دو

نفر یکسان باشد؟ (در هفته)

$$\frac{\binom{3}{2} \times 7 \times 1 \times 6 + \binom{3}{3} \times 7 \times 1 \times 1}{7 \times 7 \times 7}$$

مثال ۳۶ در یک تیراندازی با اسلحه احتمال موفقیت در هر شلیک ۸۰٪ می باشد

آزمایش آن است که آن قدر تیر بزند تا موفق شود!

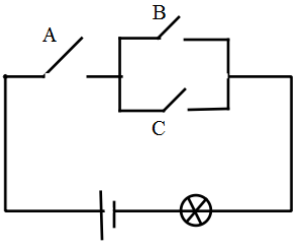
$$\left(\frac{2}{10}\right)^3 \times \frac{8}{10}$$

- احتمال موفقیت با دقیقاً ۴ گلوله چقدر است؟

$$1 - \left(\frac{8}{10} + \frac{2}{10} \times \frac{8}{10} + \left(\frac{2}{10}\right)^2 \frac{8}{10}\right) = \frac{8}{1000}$$

- احتمال موفقیت با حداقل ۴ گلوله چقدر است ؟

مثال ۳۷ در یک کارخانه احتمال سالم بودن دستگاه a, b, c به ترتیب ۶۰ و ۸۰ و ۱۰۰٪ می باشد . با کدام احتمال در یک بازرسی حداکثر یکی سالم است؟



مثال ۳۸ در مدار شکل زیر احتمال بسته بودن C, B, A به ترتیب

می باشد احتمال روشن شدن لامپ چقدر است؟

$$p(A \cap (B \cup C)) = p(A) \times p(B \cup C) = p(A) \times (p(B) + p(C) - p(B \cap C))$$

$$= p(A) \times (p(B) + p(C) - p(B) \times p(C)) = \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{3} \times \frac{1}{4} \right) = \frac{1}{4}$$

مثال ۳۹ در یک کیسه با ۴ مهره سیاه و ۵ مهره سفید ، دو مهره به تصادف و یکی پس از دیگری و بدون جایگذاری خارج می کنیم . احتمال هم رنگ بودن دو مهره چقدر است؟

$$\frac{4}{9} \times \frac{3}{8} + \frac{5}{9} \times \frac{4}{8} = \frac{72}{36} = \frac{16}{36}$$

$$\frac{\binom{5}{2} + \binom{4}{2}}{\binom{9}{2}} = \frac{10 + 6}{36} = \frac{16}{36}$$

تذکر ۴ دقت کنید خارج کردن بصورت (یکی پس از دیگر - بدون جایگذاری) و یا (یک جا) در این سوال هیچ فرقی ایجاد نمی کند. ولی بسته ب بیان مساله میتواند پاسخ ها تغییر کند (مثلا اگر مطرح میشد اولی سیاه و دومی سفید فقط روش اول قابل استفاده بود!) - پیشنهاد سر آشپز این است که هر طوری که بیان مساله بود، حل کنید!

مثال ۴۰ مثال ۳۹ در حالت انتخاب یکی پس از دیگری و با جایگذاری چطور حل می شود؟

مثال ۴۱ یک سکه و تاس را باهم پرتاب میکنیم چقدر احتمال سکه رو و تاس زوج بیاید؟

تذکر ۵ بد نیست بدانید اگر یکی از اعضای یک پیشامد رخ داده باشد، به معنای رخ دادن آن پیشامد است!



۷ متفرقه

۷-۱ متفرقه دهم

مثال ۴۲ ۸ نفر به نام های A,B,C,D,E,F,G,H عکس دسته جمعی می گیرند. مطلوب

است محاسبه احتمال:

$$\frac{1}{4} = \frac{2! \times 7!}{8!}$$

۱- A,B کنار هم باشند.

$$\frac{2! \times 3! \times 5!}{8!}$$

۲- A,B و نیز E,F,G کنار هم باشند.

$$1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

۳- A,B کنار هم نباشند.

$$1 - \frac{3! \times 6!}{8!} = \frac{25}{28}$$

۴- A,B,C کنار هم نباشند

۵- هیچ دو نفری از A,B,C کنار هم نباشند.

$$\begin{array}{cccccccc} \bigcirc & \square & \square & \square & \square & \square & \square & \square \\ \downarrow & \downarrow & & & & & & \\ abc & \dots & & & & & & \end{array} = \frac{5! \times 6 \times 5 \times 4}{8!} = \frac{5}{14}$$

۶- A,B,C کنار هم اما G,H کنار هم نباشند.

$$\frac{(a,b,c,\dots) - (a,b,c),(g,h),\dots}{8!} = \frac{3! \times 6! - 3! \times 2! \times 5!}{8!} = \frac{1}{14}$$

۷- از سمت راست به چپ B بلافاصله بعد از A باشد.

$$\frac{7!}{8!} = \frac{1}{8}$$

۸- از سمت راست به چپ B بعد از A باشد.

$$\frac{1}{2} = \text{یا B بعد از A و یا A بعد از B}$$

مثال ۴۳ اگر داشته باشیم $p(B) = 3p(A)$, $p(B - A) = \frac{10}{17}$, $p(A - B) = \frac{2}{17}$

مقدار $p(A \cup B)$ چقدر است؟

$$(I) P(A - B) = P(A) - P(A \cap B) = \frac{2}{17} \xrightarrow{II-I} P(B) - P(A) = \frac{8}{17} \rightarrow 3P(A) - P(A) = \frac{8}{17}$$

$$(II) P(B - A) = P(B) - P(A \cap B) = \frac{10}{17} \rightarrow 2P(A) = \frac{8}{17} \rightarrow P(A) = \frac{4}{17}$$

$$(I) \Rightarrow P(A) - P(A \cap B) = \frac{2}{17} \rightarrow P(A \cap B) = \frac{4}{17} - \frac{2}{17} \rightarrow P(B) = 3P(A) = \frac{12}{17}$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{4 + 12 - 2}{17} = \frac{14}{17}$$

مثال ۴۴ $P(A) + P(B) + P(C) = \frac{7}{3}$ سه پیشامد دلخواه هستند اگر بدانیم

حاصل $\min\{P(A \cap B) + P(A \cap C) + P(C \cap B)\}$ کدام است؟

$$P(A \cap B) + P(A \cap C) + P(C \cap B) = x$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \leq 1$$

$$P(A \cup C) = P(A) + P(C) - P(A \cap C) \leq 1$$

$$P(B \cup C) = P(B) + P(C) - P(B \cap C) \leq 1$$

$$+2(P(A) + P(B) + P(C)) - x \leq 3 \rightarrow 2\left(\frac{7}{3}\right) - x \leq 3 \rightarrow x \geq \frac{14}{3} - 3 \rightarrow x \geq \frac{5}{3}$$

مثال ۴۵ روش دوم قسمت دوم مثال احتمال موفقیت در تیراندازی با حداقل ۴ گلوله

$$\left(\frac{2}{10}\right)^3 \times \frac{8}{10} + \left(\frac{2}{10}\right)^4 \times \frac{8}{10} + \left(\frac{2}{10}\right)^5 \times \frac{8}{10} + \dots = \frac{\left(\frac{2}{10}\right)^3 \times \frac{8}{10}}{1 - \frac{2}{10}} = \left(\frac{2}{10}\right)^3 = \frac{8}{1000}$$

مثال ۴۶ عددی به تصادف کوچکتر یا مساوی ۳۰۰ انتخاب میکنیم مطلوب است

احتمال :

۱- مضرب ۱۰ نباشد و مضرب ۱۵ نباشد.

$$E = 10k, D = 15k \quad [10, 15] = 30 \rightarrow E \cap D = 30k$$

$$P(E' \cap D') = 1 - P(E \cup D) = 1 - P(E) - P(D) + P(E \cap D) =$$

۲- مضرب ۳ یا ۵ باشد ولی مضرب ۲ نباشد

$$A = 3k, B = 5k, C = 2k$$

$$\begin{aligned} |(A \cup B) - C| &= |A \cup B| - |(A \cup B) \cap C| = |A \cup B| - |(A \cap C) \cup (B \cap C)| \\ &= |A \cup B| - (|A \cap C| + |B \cap C| - |A \cap B \cap C|) = \end{aligned}$$

مثال ۴۷ از زیر مجموعه های مجموعه اعداد طبیعی ۱ تا ۵ دو زیر مجموعه به تصادف

انتخاب می کنیم. احتمال آنکه دو زیر مجموعه متمم باشند؟

$$\frac{1}{31}$$

مثال ۴۸ اگر $p(A - B) = \frac{1}{y}$ ، $p(B - A) = \frac{3}{y}$ باشد آنگاه حداکثر مقدار حاصل عبارت $\left\{ \frac{p(A)}{p(B)} \right\}$ چقدر است ؟

$$P(A \cap B) = x$$

$$P(A - B) = P(A) - x = \frac{1}{y} \Rightarrow P(A) = x + \frac{1}{y} \quad P(A - B) = P(B) - x = \frac{3}{y} \Rightarrow P(B) = x + \frac{3}{y}$$

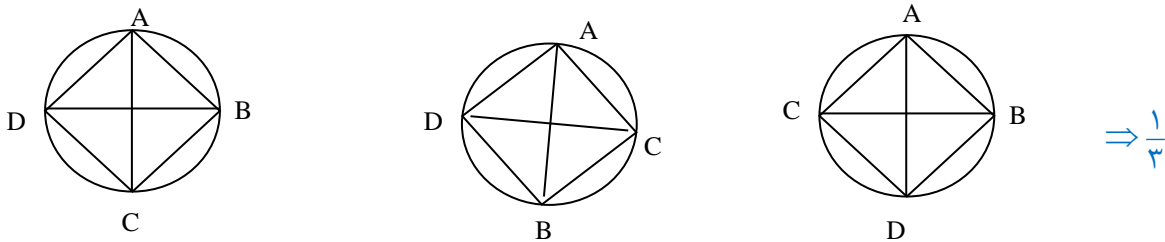
$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - x = x + \frac{4}{y} \leq 1 \Rightarrow x \leq \frac{y-4}{y}$$

$$\frac{P(A)}{P(B)} = \frac{x + \frac{1}{y}}{x + \frac{3}{y}} = \frac{\left(x + \frac{3}{y}\right) - \frac{2}{y}}{x + \frac{3}{y}} = 1 - \frac{\frac{2}{y}}{x + \frac{3}{y}} \Rightarrow \dots$$

$$\max \left\{ \frac{P(A)}{P(B)} \right\} = 1 - \frac{\frac{2}{y}}{\frac{3}{y} + \frac{3}{y}} = 1 - \frac{2}{6} = \frac{2}{3}$$

مثال ۴۹ از میان ۱۰ نقطه متساوی الفاصله روی دایره ۴ نقطه به تصادف انتخاب می کنیم . و به ترتیب A,B,C,D می نامیم. احتمال آنکه AC و BD متقاطع باشند چقدر است ؟

تذکر ۴ بد نیست بدانید، حالات نام گذاری یک n ضلعی از جایگت دوری برگردان بدست می آید!



مثال ۵۰ اگر $p(A) \neq 0$ باشد و بدانیم $p(A) = 4p(A - B)$ ، آنگاه کدام یک از موارد زیر امکان پذیر نیست؟

(۱) $3p(A) = p(B)$ (۲) $2p(A) = p(B)$ (۳) $p(A) = 2p(B)$ (۴) $p(A) = p(B)$

$$P(A) = 4P(A) - 4P(A \cap B) \rightarrow 3P(A) = 4P(A \cap B) \rightarrow A \cap B \leq B$$

$$\rightarrow 3P(A) \leq 4P(B) \Rightarrow P(A) \leq \frac{4}{3}P(B) \rightarrow \max P(A) = \frac{4}{3}P(B)$$

مثال ۵۱ تاسی را سه بار پرتاب می کنیم و به ترتیب اعداد رو شده را ضرایب $\frac{-c}{a}$ معادله $ax^2 + bx + c = 0$ قرار می دهیم. احتمال آن که یکی از ریشه های معادله

باشد چقدر است؟


$$x_1 = -1 \Rightarrow a - b + c = 0 \Rightarrow b = a + c \rightarrow$$

$$1 = ? + ? , 2 = 1 + 1, 3 = 1 + 2 = 2 + 1, 4 = 1 + 3 = 3 + 1 = 2 + 2, 5 = 1 + 4 = 4 + 1 = 2 + 3 = 3 + 2,$$


$$6 = 1 + 5 = 5 + 1 = 3 + 3 = 2 + 4 = 4 + 2$$

$$\Rightarrow n(A) = 15, n(S) = 6^3 = 216 \rightarrow \frac{15}{216}$$

مثال ۵۲ از زیر مجموعه های ناتهی مجموعه اعداد طبیعی ۱ تا ۵، ۳ زیر مجموعه به تصادف انتخاب می کنیم طوری که اجتماع آنها برابر خود مجموعه باشد. احتمال آنکه اشتراک دودوی آنها تهی باشد؟



$$\frac{\binom{5}{1} \binom{4}{1} \binom{3}{1}}{2!} = 10 \quad n(A) = 25$$

$$\Rightarrow n(S) = \binom{31}{3} = 5 \times 29 \times 31$$


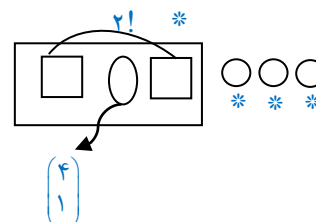
$$\frac{\binom{5}{1} \binom{4}{2} \binom{2}{2}}{2!} = 15 \quad P(A) = \frac{5}{899}$$

مثال ۵۳ $p(A \cup B') = 0.7, p(A' \cup B) = 0.8, p(A' \cup B') = 0.9 \rightarrow p(A \cup B) = ?$

مثال ۵۴ مجموعه اعداد طبیعی ۱ تا ۱۰ را در نظر می گیریم. یک زیرمجموعه ۶ عضوی انتخاب می کنیم احتمال آنکه شامل ۱ و ۱۰ بوده و فاقد ۵ باشد؟

مثال ۵۵ پدر و مادر و ۴ فرزندشان به طور تصادفی در یک صف قرار می گیرند. چقدر احتمال دارد دقیقاً یک نفر بین پدر و مادر باشند؟

$$n(S) = 6!$$



$$\frac{\binom{4}{1} \binom{4}{1}}{2!} \times 2! \times 4! = 4! \times 2! \times 4!$$

$$\Rightarrow n(A) = \binom{4}{1} \times 2! \times 4!$$

$$\rightarrow P = \frac{4}{15}$$

۷-۲ چند مطلب نه چندان کاربردی

مورد ۱: در پرتاب ۳ تاس احتمال آمدن مجموع k با $k-21$ برابر است و تعداد حالات بازی $k < 9$ برابر

$$\text{است با } \binom{k-1}{2} :$$

چرایی $\binom{k-1}{2}$: باید $n_1 + n_2 + n_3 = k$ باشد در شرایطی که $n_1, n_2, n_3 \geq 1$:

با قانون توزیع اشیا یکسان در جعبه های متمایز به شرطی که در هر جعبه حداقل یک شی برود

$$\binom{k-3+3-1}{3-1} = \binom{k-1}{2} \quad \text{داریم :}$$

چرایی k و $k-21$: عدد ۱ همزاد ۶ هست و:

$$1+1+4=6$$

$$6+6+3=15 \rightarrow 15+6=21 !!$$

مورد ۲: رابطه $P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C)$ درست است اگر و تنها اگر داشته باشیم

$$P(A \cap B) = P(A \cap C) = P(B \cap C) = 0 :$$

برای اثبات از این حقیقت استفاده کنید : $P(A \cup B) = 0 \Leftrightarrow P(A) = P(B) = 0$

مورد ۳: می توان نشان داد که : $P(A \cap B \cap C) \leq P(A) + P(B) + P(C)$





امیر وفائی

مدرس ریاضیات دوره دوم متوسطه از پایه تا کنکور - متخصص هر دو رشته ریاضی و تجربی
طراح سوالات همه شاخه های ریاضی کانون فرهنگی آموزش (قلمچی)

رتبه ۲۶ کنکور سراسری

نفر اول دوره کارشناسی و کارشناسی ارشد مهندسی عمران دانشگاه صنعتی شریف
پذیرفته شده دوره دکتری مستقیم مهندسی عمران دانشگاه صنعتی شریف
رکوردار معدل دانشکده عمران دانشگاه صنعتی شریف از بدو تاسیس تا کنون

کسب عنوان دانشجوی نمونه دانشکده عمران و دانشگاه صنعتی شریف در سال ۱۳۹۴ و ۱۳۹۵
سابقه بیش از ۱۰ ترم استادیاری (دستیار استاد) در دروس مختلف تخصصی و عمومی دانشگاه صنعتی شریف

گذراندن دوره فرعی رشته ریاضی دانشگاه صنعتی شریف

استاد حل تمرین ریاضی دانشگاه صنعتی شریف

حضور در مدرسه شهیدبشهرتی ۱ (تیزهوشان) از سال ۹۲ به عنوان مشاور و مدرس ریاضی
تالیف کتاب تا کنکور با همکاری مدرسه تیزهوشان
مبتکر برنامه های جمع بندی ویژه ۱۰۰-۱۰۰ در همه پایه ها با مشابهت ۱۰۰ درصدی در کنکور سراسری
آموزش مفهومی و متفاوت درس ریاضی منطبق بر برنامه دقیق تدریس و آزمون و برنامه تست

مدرس رتبه های برتر (تک رقمی و دو رقمی)



AMIRVAF AEIG



www.Donat.Academy

هر گونه کپی برداری از محتوای این جزوه پیگرد قانونی دارد و مولف هیچ گونه رضایتی
مبنی بر استفاده بدون اجازه از محتوای جزوه، ندارد. (All Rights Reserved)