آموزش تخصصی ریاضیات

امیر وفائی

جزوات آموزش ریاضی

مثلثات

- فصل دوم
- ریاضی و تجربی ۱۰

@vafaei_math

AmirVafaei6

0936 879 1709

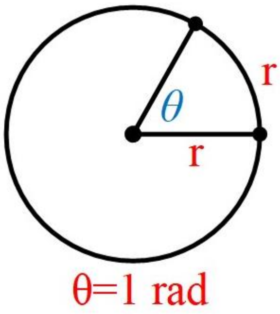
www.Donat.academy

فهرست مطالب

1 مفاهیم اولیه

1-1 چند تعریف

درجه: اگر هر دایره را به ۳۶۰ قسمت مساوی تقسیم کنیم، هر قسمت آن یک قطاع یک درجه می‌باشد.



رادیان: هر کمانی از دایره که طول آن برابر شعاع دایره باشد، یک رادیان نام دارد.

در واقع نسبت طول کمانی از دایره به شعاع آن، برابر زاویه کمان برحسب رادیان می باشد.

$$\theta=\frac{l}{r}=\frac{r}{r}=1\ rad$$

(زاویه مرکزی روبروی کمان : زاویه کمان)

محیط دایره: محیط هر دایره 2π برابر شعاع آن است.

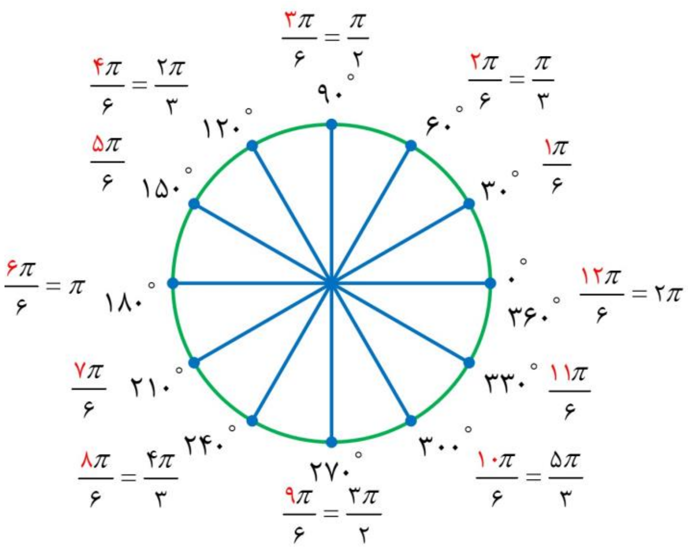
پس 2π رادیان برابر با ۳۶۰ درجه است : π رادیان برابر با ۱۸۰ درجه است : داریم

تبدیل درجه و رادیان :

$$\frac{R}{\pi}=\frac{D}{180}$$

۱-۲ تبدیل های معروف

واحد	مقدار							
Revolutions	۰	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	۱
درجه	۰°	۳۰°	۴۵°	۶۰°	۹۰°	۱۸۰°	۲۷۰°	۳۶۰°
رادیان	۰	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π



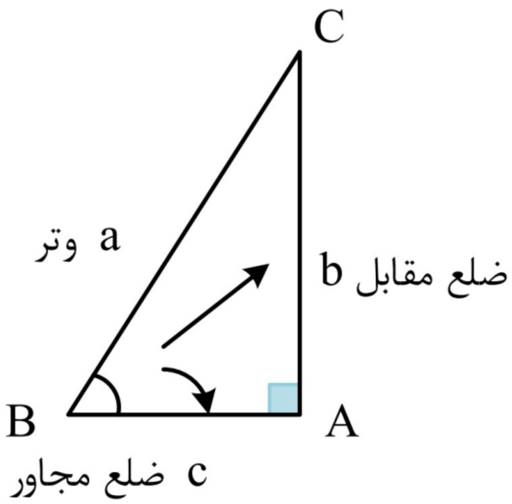
یک رادیان $\frac{1}{\pi}=\frac{D}{180}\rightarrow D=\frac{180}{\pi}\simeq 57^\circ$

۴۵ درجه $\frac{R}{\pi}=\frac{45}{180}\rightarrow R=\pi\frac{45}{180}=$

$\frac{2\pi}{3}$ رادیان

تذکر ۱) زاویه بین عقربه‌های ساعت: ۱ ساعت ۳۰ – ۵/۵ دقیقه = $|30\times h-5/5\times m|$

۱-۳ تعریف نسبت های مثلثاتی در یک مثلث قائم الزاویه



$$\text{Sin } B = \frac{\text{اندازه ضلع مقابل زاویه}}{\text{اندازه وتر}} = \frac{b}{a}$$

$$\text{Cos } B = \frac{\text{اندازه ضلع مجاور زاویه}}{\text{اندازه وتر}} = \frac{c}{a}$$

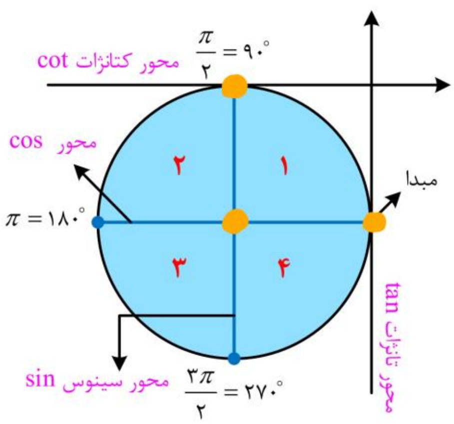
$$\tan B = \frac{\text{اندازه ضلع مقابل زاویه}}{\text{اندازه ضلع مجاور زاویه}} = \frac{b}{c}$$

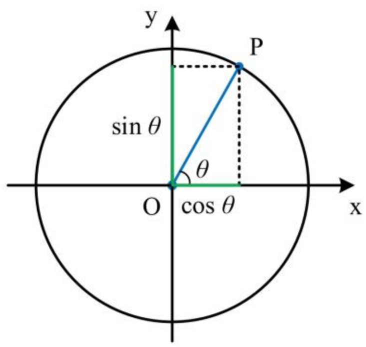
$$\cot B = \frac{۱}{\tan B} = \frac{\text{اندازه ضلع مجاور زاویه}}{\text{اندازه ضلع مقابل زاویه}} = \frac{c}{b}$$

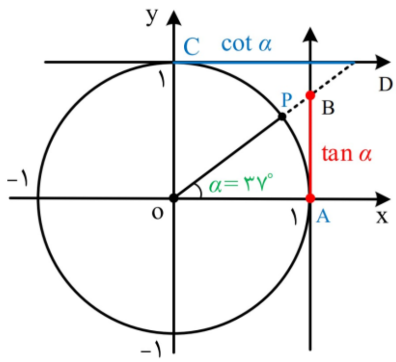
پس با توجه به تعریف های بالا داریم : $\cot B = \frac{\cos B}{\sin B}$, $\tan B = \frac{\sin B}{\cos B}$

۱-۴ دایره مثلثاتی و نسبت‌های آن و علامتشان

به دایره‌ای با شعاع واحد با جهت مثبتِ خلاف عقربه‌های ساعت، دایره مثلثاتی گوئیم.







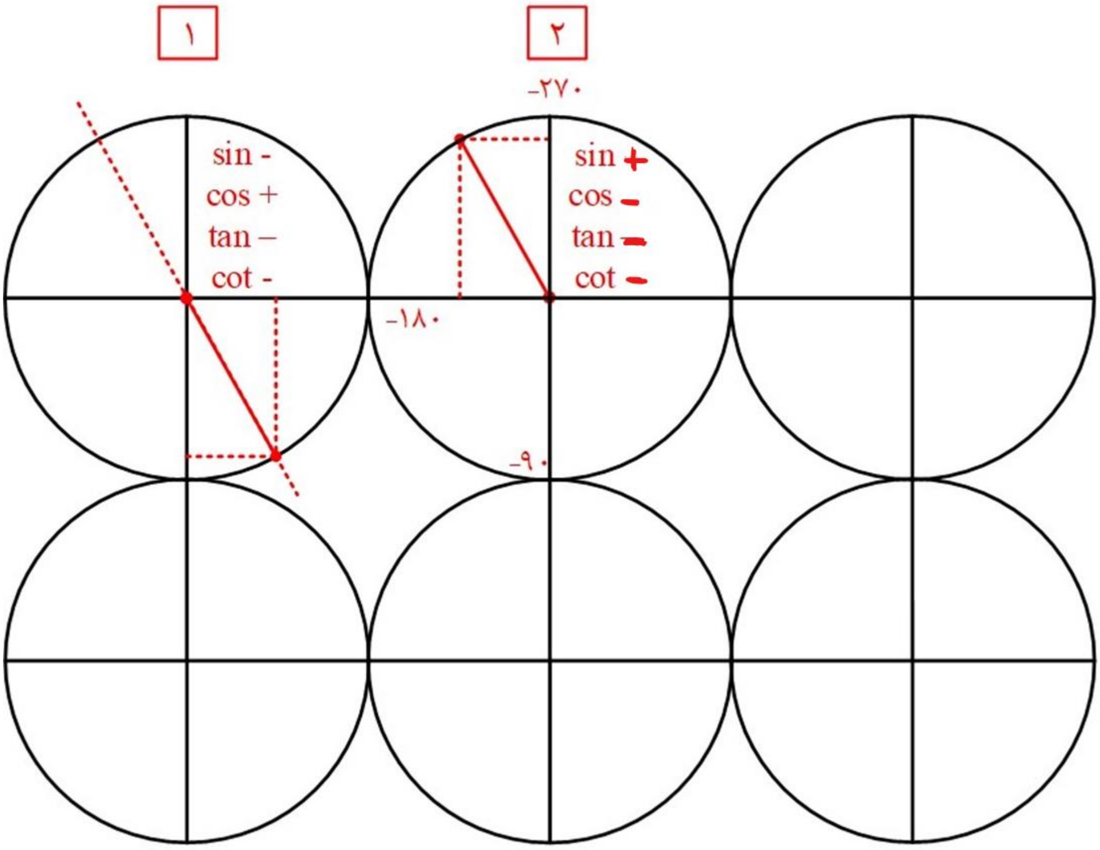
پس‌کافیست بعد از پیدا کردن شعاع حامل زاویه برای سینوس و کسینوس ، عمود بر محور نموده و برای تانژانت و کتانژانت، آنقدر ادامه دهیم تا آن‌ها را قطع نماید.

۱-۵ پیدا کردن زوایای مختلف در دایره

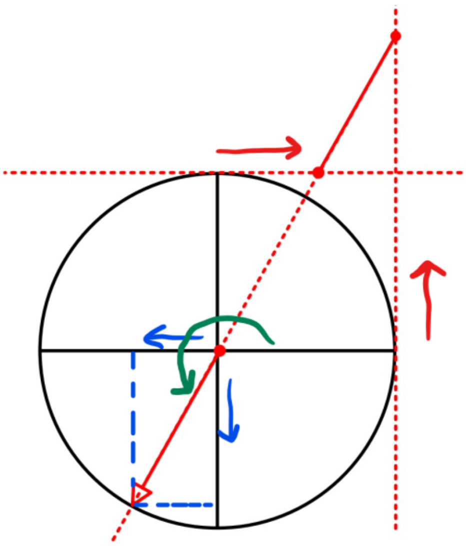
هر دایره معرف ۳۶۰ درجه یا 2π رادیان می‌باشد که به ۴ ناحیه با طول ۹۰ درجه یا $\frac{\pi}{2}$ رادیان تقسیم می‌گردد.

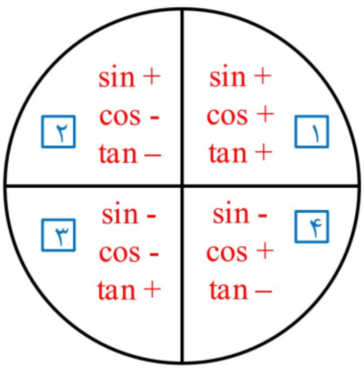
مثال ۱) زوایای زیر را در یک دایره کامل به همراه نسبت‌هایشان و علامتشان نشان دهید.

$$(1)2\pi-\frac{\pi}{4}\ ,\ (2)-220\ ,\ (3)-150\ ,\ (4)\frac{3\pi}{4}\ ,\ (5)\frac{-3\pi}{2}\ ,\ (6)\frac{6\pi}{5}$$



۱-۶ جمع‌بندی علامت‌ها در دایره مثلثاتی





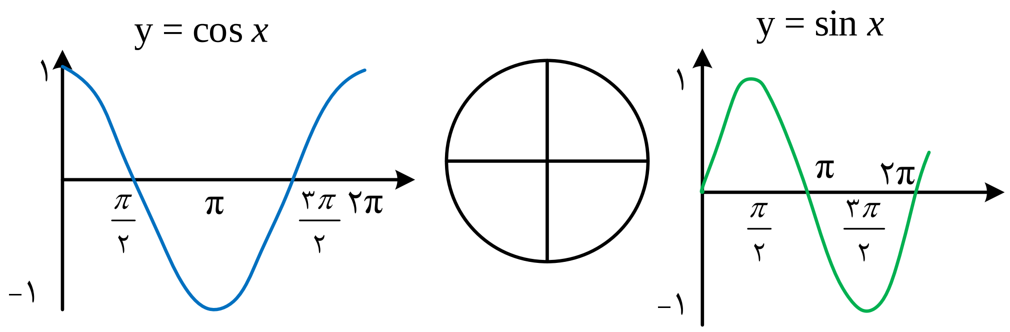
مثال ۲) با فرض $|\sin(x)|+\sin(x)=0, |\cos(x)|-\cos(x)=0$ انتهای کمان x در کدام ناحیه قرار دارد؟

$|\cos(x)|=\cos(x)\Rightarrow\cos(x)$

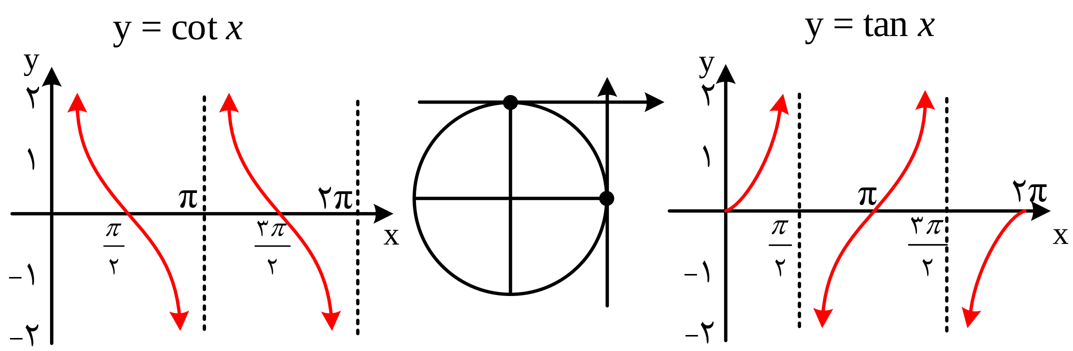
$|\sin(x)|=-\sin(x)\Rightarrow\sin(x)$

۱-۷ تغییرات نسبت‌های مثلثاتی و نمودار آن‌ها

۱. $\sin(x), \cos(x)$



۲. $\tan(x), \cot(x)$ (اختیاری)



$$\begin{cases} \dfrac{1}{0/1}=10 \ , \ \dfrac{1}{0/001}=1000 \ , \ \dfrac{1}{10^{-10}}=10^{10} \ \Rightarrow \dfrac{1}{0^{+}}=+\infty \\ \dfrac{1}{-0/1}=-10 \ , \ \dfrac{1}{-0/001}=-1000 \ , \ \cdots \ \Rightarrow \dfrac{1}{0^{-}}=-\infty \end{cases}$$

چند نتیجه بسیار مهم:

$$-1 \le \cos(x) \le 1 \quad , \quad -1 \le \sin(x) \le 1 \qquad -\infty < \cot(x) < \infty \quad , \quad -\infty < \tan(x) < \infty$$

مثال ۳) حدود عبارت $y_1 = 7 - 5\cos(x)$ را محاسبه نمائید؟

$$-1 \le \cos x \le +1 \Rightarrow -5 \le -5\cos x \le 5 \Rightarrow 2 \le 7 - 5\cos x \le 12$$

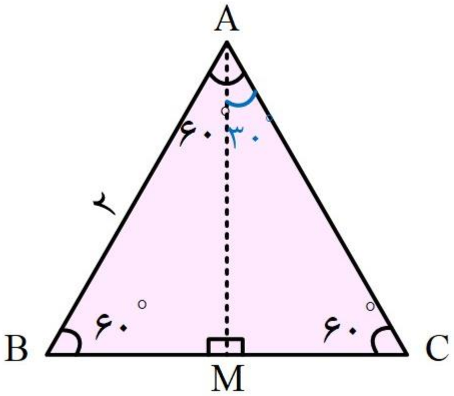
مثال ۴) (تمرین) حدود عبارت $y_2 = \sin^2 x + 4\sin x + 7$ را محاسبه نمائید؟

$$y_2 : \sin^2 x + 4\sin x + 4 + 3 = (\sin x + 2)^2 + 3$$

$$-1 \le \sin x \le +1 \Rightarrow 1 \le \sin x + 2 \le 3 \Rightarrow$$

$$1 \le (\sin x + 2)^2 \le 9 \Rightarrow 4 \le (\sin x + 2)^2 + 3 \le 12 \ \Rightarrow y_2 \in [4, 12]$$

۱-۸ محاسبه نسبت های معروف مثلثاتی



مثلث متساوی الاضلاعی ABC با اضلاعی به طول دو واحد را در نظر بگیرید.

الف) محل برخورد نیمساز زاویه A با پاره خط BC را M بنامید. با توجه به خواص مثلث متساوی الساقین، AM میانه ضلع BC است. بنابراین:

$$MB = MC = \frac{۲}{۲} = ۱ \Rightarrow AM = \sqrt{AB^{۲} - BM^{۲}} = \sqrt{۳}$$

ب) با استفاده از رابطه فیثاغورس طول AM و حاصل کسرهای زیر را به دست آورید.

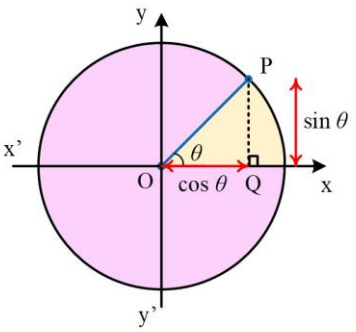
$$\tan ۳۰^\circ = \frac{BM}{AM} = \frac{۱}{\sqrt{۳}} \text{ , } \tan ۶۰^\circ = \frac{AM}{BM} = \frac{\sqrt{۳}}{۱} = \sqrt{۳}$$

پ) با استفاده از یک مثلث قائم الزاویه متساوی الساقین، تانژانت و کتانژانت زاویه ۴۵ درجه را پیدا کنید.

جمع‌بندی

مقدار	۳۰°	۴۵°	۶۰°
sin A	$\frac{۱}{۲}$	$\frac{\sqrt{۲}}{۲}$	$\frac{\sqrt{۳}}{۲}$
cos A	$\frac{\sqrt{۳}}{۲}$	$\frac{\sqrt{۲}}{۲}$	$\frac{۱}{۲}$
tan A	$\frac{\sqrt{۳}}{۳}$	۱	$\sqrt{۳}$
cot A	$\sqrt{۳}$	۱	$\frac{\sqrt{۳}}{۳}$

۱-۹ نقطه روی دایره مثلثاتی



$$P(x, y) \text{ , } \sin(\theta) = y \text{ , } \cos(\theta) = x \text{ , } \tan(\theta) = \frac{y}{x} \text{ , } \cot(\theta) = \frac{x}{y}$$

$$P(\cos ۳۰, \sin ۳۰) = P(\frac{\sqrt{۳}}{۲}, \frac{۱}{۲})$$

$$\overset{\Delta}{OPQ} : OQ^{۲} + PQ^{۲} = ۱ \Leftrightarrow \cos^{۲}\theta + \sin^{۲}\theta = ۱$$

مثـال ۵) نقطه p روی دایره مثلثاتی در ربع چهارم قرار دارد و می‌دانیم $\sin\theta = -\frac{\sqrt{۵}}{۵}$ مطلوب است،

الف) مختصات نقطه **p**

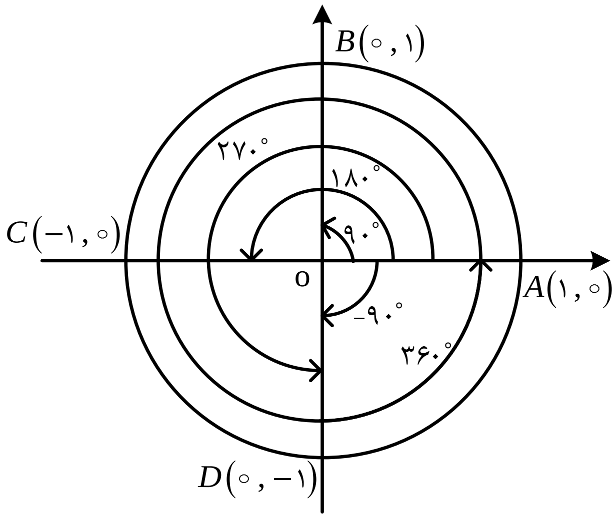
ب) محاسبه سایر نسبت های این زاویه.

ایده دیوونه ! **رسم مثلث قائم الزاویه فرضی با وتر و .....**

دو مساله مرتبط و مهم در متفرقه

۱-۱۰ نسبت های خاص مثلثاتی

در واقع باید مختصات نقطه‌هایی را تعیین کنید که محورها و دایره واحد یکدیگر را قطع می‌کنند. در زاویه صفر درجه، ضلع‌های ابتدایی و انتهایی منطبق‌اند و $x=۱$ و $y=\circ$ بنابراین:



$$\sin(\circ^\circ)=y=\circ$$

$$\cos(\circ^\circ)=x=۱$$

$$\tan(\circ^\circ)=\frac{y}{x}=\frac{\circ}{۱}=\circ$$

$$\cot(\circ^\circ)=\frac{x}{y}=\frac{۱}{\circ}$$ تعریف نشده

چون $\frac{۱}{\circ}$ تعریف نشده است، پس $\cot(\circ^\circ)$ تعریف نشده است. ضلع انتهایی زاویه ۹۰°، دایره را در B می‌برد و $B(\circ,۱)$ در نتیجه $x=\circ$, $y=۱$.

$$\sin ۹۰^\circ=y=۱\ ,\ \cos ۹۰^\circ=x=۰\ ,\ \tan ۹۰^\circ=\frac{۱}{\circ}\ ,\ \cot ۹۰^\circ=\frac{\circ}{۱}=\circ$$

بقیه را به همین ترتیب محاسبه کنید در جدول زیر آن‌ها را نوشته‌ایم و محاسبه نسبت‌های مثلثاتی ۳۶۰° مشابه $\circ^\circ$ است. چرا؟

دو زاویه -۹۰° و ۲۷۰° هم انتها هستند با محاسبه نسبت‌های ۲۷۰°، نسبت‌های مثلثاتی -۹۰° را نیز بنویسید.

نسبت‌های مثلثاتی ۱۸۰° و -۱۸۰° چه تفاوتی دارند؟

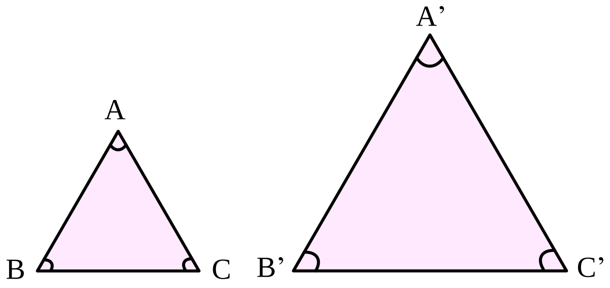
θ	$\sin(\theta)$	$\cos(\theta)$	$\tan(\theta)$	$\cot(\theta)$
$\circ^\circ$	صفر	۱	صفر	تعریف نشده
۹۰°	۱	صفر	تعریف نشده	صفر
۱۸۰°	صفر	۱-	صفر	تعریف نشده
۲۷۰°	۱-	صفر	تعریف نشده	صفر
۳۶۰°	صفر	۱	صفر	تعریف نشده

Dont حفظ – تصور دایره و تامام!

2 مثلث و مثلثات

۲-۱ تشابه

برای معرفی مفهوم مثلثات به مفهوم تشابه نیاز داریم. در پایه نهم با این مفهوم آشنا شدید و دیدید که دو مثلث با هم متشابه‌اند، هر با زوایای نظیر در آن‌ها برابر و نسبت اضلاع متناظر نیز با هم برابر باشند.



یعنی اگر $\overset{\Delta}{ABC} \sim \overset{\Delta}{A'B'C'}$، آنگاه داریم:

$\frac{AB}{A'B'}=\frac{BC}{B'C'}=\frac{AC}{A'C'}$ و $A=A', B=B', C=C'$.

حالت های تشابه :

۱- برابری دو زاویه (ز ز)

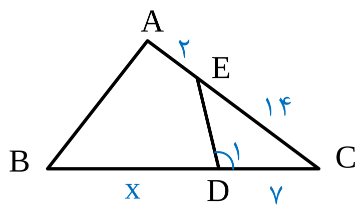
۲- اگر دو مثلث یک زاویه برابر و اضلاع نظیر زاویه متناسب داشته باشند.(ض ز ض)

۳- اگر دو مثلث ۳ ضلع متناسب داشته باشند. (ض ض ض)

در دو مثلث متشابه به نسبت اضلاع نسبت تشابه گویند و همچنین اجزای فرعی دو مثلث و محیط هایشان نیز دارای همین نسبت و مساحت هایشان با مربع این نسبت، متناسب اند.

مثـال ۶) در شکل مقابل $A=D_1$، طول BD چند واحد است؟

$(AE=۲, CE=۱۴, DC=۷)$



$A=D_1 \to \overset{\Delta}{ABC} \sim \overset{\Delta}{EDC}$, $E=B \Rightarrow \frac{۱۶}{۷}=\frac{x+۷}{۱۴}$

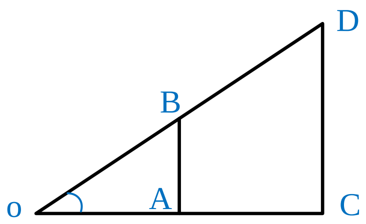
$\Rightarrow x+۷=۳۲ \to x=۲۵$

۲-۲ مثال کاربردی

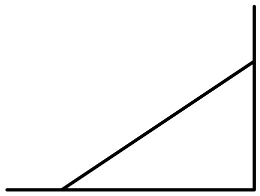
مثال ۷) امیر می خواهد ارتفاع یک تیر برق را که طول سایه آن ۳ متر است را حساب کند. قد او ۱/۸ متر . طول سایه او در همین لحظه ۰/۶ متر است. مطلوب است ارتفاع تیر برق؟

$$OC=۳\,,\,BA=۱/۲\,,\,OA=۰/۶$$

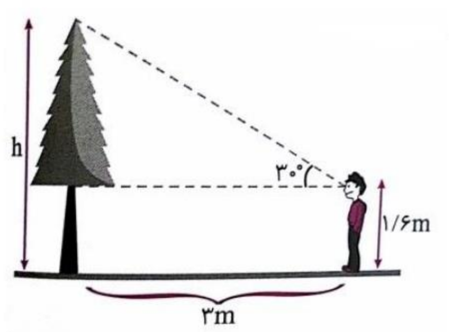
$$\tan O=\frac{BA}{OA}=\frac{DC}{OC}\Rightarrow\frac{۱/۸}{۰/۶}=\frac{DC}{۳}\Rightarrow DC=۹$$



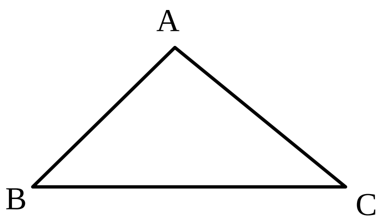
مثال ۸) مطابق شکل نردبانی به طول $۲\sqrt{۲/۴۴}$ متر زیر نقطه A قرار دارد اگر نردبان را با زاویه ۵۰ درجه روی زمین بگذاریم. ارتفاع نقطه A و همچنین فاصله پای نردبان از ساختمان چقدر است ؟ $(\tan ۵۰=۱/۲)$



مثال ۹) (تمرین) ناظری با قد ۱/۶ متری نوک درختی که در فاصله ۳ متری آن قرار دارد را به گونه ای رویت می کند که زاویه دید آن با سطح افق ۳۰ درجه است. ارتفاع درخت را محاسبه نمائید. $\left(\sqrt{۳}=۱/۷\right)$

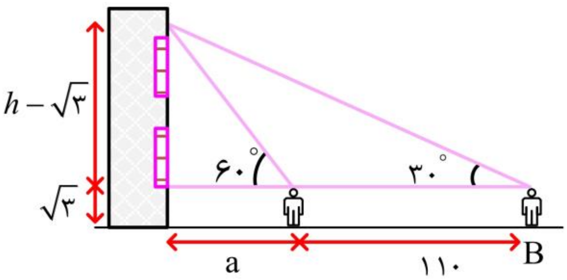


مثال ۱۰) مثلثی به شکل مقابل مفروض است. اندازه ضلع BC و زاویه B چقدر است؟ $(AB=۱۰, AC=۹, C=۳۴,\ \sin ۳۴=\frac{۵}{۹})$



رسم ارتفاع !!!!!

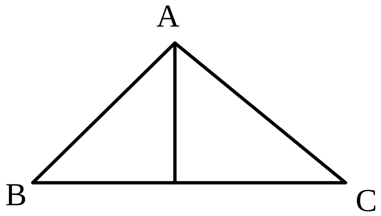
مثـال ۱۱) شخصی با قد تقریبا $\sqrt{۳}$ متر در نقطه B ساختمانی را با زاویه ۳۰ درجه رویت می کند . اگر این شخص به ساختمان ۱۱۰ متر دیگر نزدیک گردد، ساختمان را با زاویه ۶۰ درجه رویت می کند. ارتفاع ساختمان را محاسبه نمائید.



$$\tan ۶۰ = \sqrt{۳} = \frac{h-\sqrt{۳}}{a} , \tan ۳۰ = \frac{\sqrt{۳}}{۳} = \frac{h-\sqrt{۳}}{a+۱۱۰} \Rightarrow h-\sqrt{۳} = \frac{\sqrt{۳}}{۳}(a+۱۱۰)$$
$$\Rightarrow \sqrt{۳}a = \frac{\sqrt{۳}}{۳}(a+۱۱۰) \Rightarrow ۳a = a+۱۱۰ \Rightarrow ۲a = ۱۱۰ \Rightarrow a = ۵۵$$

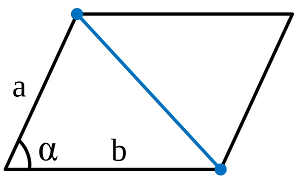
۲-۳ حل مثلث (روابط طولی)

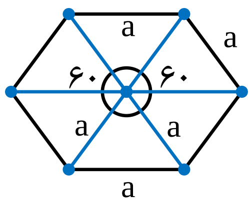
۲-۳-۱ مساحت مثلث



$$S = \frac{۱}{۲} a h_a$$
$$h_a = c\sin B = b\sin C \to S = \frac{۱}{۲} ac\sin B = \frac{۱}{۲} ab\sin C$$
$$S = \frac{۱}{۲} bc\sin A$$
$$S = \frac{۱}{۲} \times (\text{حاصل ضرب دو ضلع}) \times \sin(\text{زاویه بین دو ضلع})$$

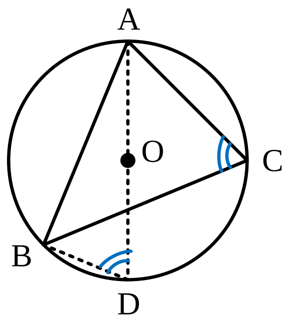
مثـال ۱۲) فرمولی برای محاسبه مساحت متوازی اضلاع و همچنین یک شش ضلعی منتظم ارائه کنید.





مثـال ۱۳) مطلوب است محاسبه مساحت مثلث ABC که : $AB = ۶, BC = ۴, B = ۳۰^\circ$

۲-۳-۲ قانون سینوس ها



$$S=\frac{۱}{۲}ab\sin C=\frac{۱}{۲}ac\sin B=\frac{۱}{۲}bc\sin A\rightarrow\times\frac{۲}{abc}$$

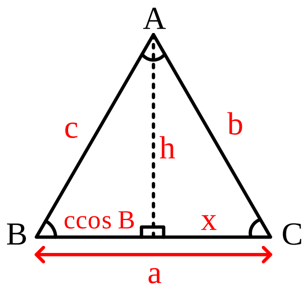
$$\rightarrow\frac{\sin C}{c}=\frac{\sin B}{b}=\frac{\sin A}{a}\rightarrow\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=۲R$$

$$\sin C=\sin D=\frac{AB}{AD}=\frac{c}{۲R}$$

مثال ۱۴) در مثلثی $A=۶۰, b=۸, a=۴\sqrt{۶}$، زاویه C را در این مثلث پیدا کنید.

تذکر ۲) جمع زوایا در هر مثلثی برابر است با ۱۸۰ درجه!

۲-۳-۳ قضیه کسینوس ها (یک گام فراتر)



$$a^۲=b^۲+c^۲-۲bc\cos A$$
$$b^۲=a^۲+c^۲-۲ac\cos B$$
$$c^۲=a^۲+b^۲-۲ab\cos C$$

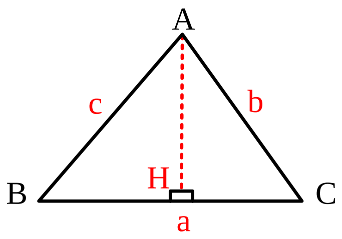
مثال ۱۵) در مثلثی که دوضلع آن برابر۲ و ۴ و زاویه بین آن دوضلع ۶۰ درجه باشد، طول ضلع سوم را پیدا کنید.

مثال ۱۶) (تمرین) اگر بدانیم $b^۳+c^۳=a^۲(b+c)$ زاویه A چند درجه است ؟

$$b^۳+c^۳=(b+c)\left(b^۲-bc+c^۲\right)=(b+c)a^۲$$

$$a^۲=b^۲+c^۲-۲bc\cos A\Rightarrow -bc=-۲bc\cos A\Rightarrow\cos A=\frac{۱}{۲}\Rightarrow A=۶۰^\circ$$

۲-۳-۴ سه ضلع و دو زاویه (تصویر)



$$a = b\cos C + c\cos B$$
$$b = a\cos C + c\cos A$$
$$c = b\cos A + a\cos B$$

اثبات:

$$a = BC = BH + HC = c\cos B + b\cos C$$

مثال ۱۷) اگر در مثلث ABC داشته باشیم $AB=\sqrt{۲}, AC=۶, B=۶۰, C=۴۵$ مطلوب است طول ضلع سوم و همچنین کسینوس زاویه سوم؟

$$a = b\cos C + c\cos B = ۶\frac{\sqrt{۲}}{۲} + \sqrt{۲}\frac{۱}{۲} = ۷\frac{\sqrt{۲}}{۲}$$
$$a^{۲} = b^{۲} + c^{۲} - ۲bc\cos A \rightarrow ۲bc\cos A = b^{۲} + c^{۲} - a^{۲} \rightarrow$$
$$\cos A = \frac{b^{۲}+c^{۲}-a^{۲}}{۲bc} = \frac{۳۶+۲-۲۴/۵}{۱۲\sqrt{۲}} = \frac{۱۳/۵}{۱۲\sqrt{۲}}$$

۲-۳-۵ دیگر مثال ها (+ ۳ مساله در متفرقه)

مثال ۱۸) چند مثلث با معلومات $B=۶۰, \frac{c\sqrt{۳}}{۳}=b$ می‌توان رسم نمود؟

مثال ۱۹) اگر در مثلث ABC بدانیم $\cos(\frac{A}{۲}+B)=۰$، نوع مثلث را تعیین کنید.

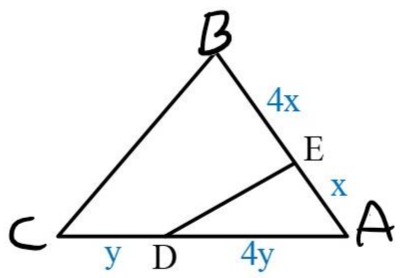
مثال ۲۰) اگر در مثلثی رابطه $\cos(A-B)+\cos(B-C)+\cos(C-A)=۳$ برقرار باشد. نوع مثلث را تعیین کنید.

میدانیم کسینوس هر زاویه کمتر یا مساوی یک است .

پس باید هر سه کسینوس مساله برابر ۱ باشد: زوایا برابرند :

مثلث متساوی الاضلاع

مثال ۲۱) در مثلث زیر رابطه‌ی $\frac{AE}{BE}=\frac{CD}{DA}=\frac{1}{4}$ برقرار می باشد. مساحت شکل $BCDE$ چند برابر مساحت مثلث AED می‌باشد.



$$\boxed{I}\ S_{ABC}=\frac{1}{2}(25xy)\sin A$$

$$\boxed{II}\ S_{ADE}=\frac{1}{2}(4xy)\sin A$$

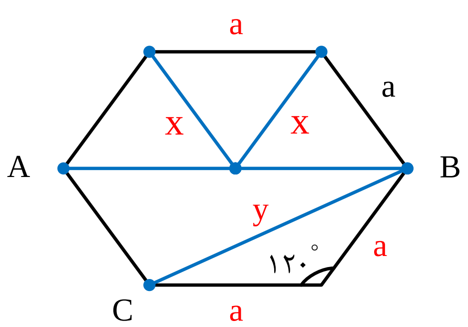
$$S_{BEDC}=\boxed{I}-\boxed{II}=\frac{1}{2}(21xy)\sin A$$

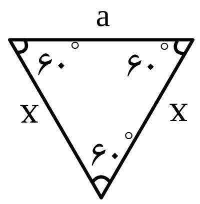
$$\frac{S_{BEDC}}{S_{ADE}}=\frac{\frac{1}{2}\times 21(xy\sin A)}{\frac{1}{2}\times 4(xy\sin A)}=\frac{21}{4}$$

سوالات نسبت مساحتی

روش حل این سوال را باید طلا گرفت! و کاربرد این فرمول در این سبک سوالات

مثال ۲۲) طول قطر ۶ ضلعی منتظم را پیدا کنید؟





$x=a\Rightarrow AB=2a$ قطر بزرگ

$\frac{y}{\sin 120}=\frac{a}{\sin 30}\Rightarrow y=\sqrt{3}a=CB$ قطر کوچک

مثال ۲۳)(تمرین) در مثلث ABC رابطه $(a+b+c)(a+b-c)=3ab$ برقرار است. زاویه C چقدر است؟

$$(a+b)^2-c^2=3ab$$

$$\Rightarrow a^2+b^2+2ab-c^2=3ab$$

$$\Rightarrow a^2+b^2-c^2=ab$$

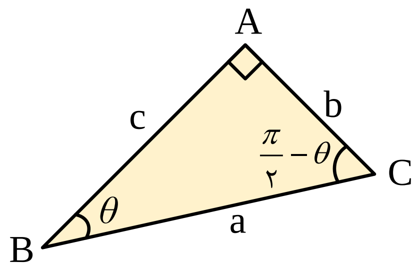
$$\Rightarrow a^2+b^2-\left(a^2+b^2-2ab\cos C\right)=ab\Rightarrow \cos C=\frac{1}{2}\Rightarrow C=60^\circ$$

3 تبدیل کمان‌ها

۳-۱ روش سنتی

۳-۱-۱ متمم

یک مثلث قائم الزاویه دلخواه مانند شکل زیر را در نظر بگیرید.



$\sin\theta=\frac{b}{a}$	$\sin\left(\frac{\pi}{۲}-\theta\right)=\frac{c}{a}$
$\cos\theta=\cdots$	$\cos\left(\frac{\pi}{۲}-\theta\right)=\cdots$
$\tan\theta=\cdots$	$\tan\left(\frac{\pi}{۲}-\theta\right)=\cdots$
$\cot\theta=\cdots$	$\cot\left(\frac{\pi}{۲}-\theta\right)=\cdots$

در فعالیت قبل زاویه‌های مورد بحث تند بودند. روابط بدست آمده در آنجا در حالت کلی نیز برقرار است. به طور کلی برای دو زاویه متمم θ و $\frac{\pi}{۲}-\theta$ همواره روابط زیر برقرار است.

جمعبندی متمم

$$\sin\left(\frac{\pi}{۲}-\theta\right)=\cos\theta$$
$$\cos\left(\frac{\pi}{۲}-\theta\right)=\sin\theta$$
$$\tan\left(\frac{\pi}{۲}-\theta\right)=\cot\theta$$
$$\cot\left(\frac{\pi}{۲}-\theta\right)=\tan\theta$$

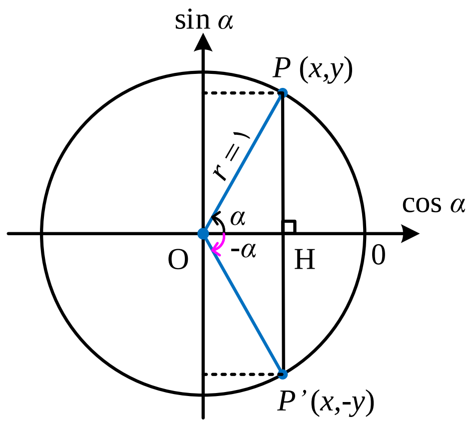
$$\alpha+\beta=\frac{\pi}{۲}\rightarrow\beta=\frac{\pi}{۲}-\alpha=\frac{\pi}{۲}+(-\alpha)$$
$$\tan\alpha=\cot\beta\Rightarrow\tan\alpha\times\tan\beta=۱$$

مثال ۲۴) مقدار $\tan ۸۸\times\tan ۸۹\times\tan ۱\times\tan ۲$ را محاسبه کنید.

مثال ۲۵) اگر $\sin ۷۰=a$ باشد آنگاه مقدار $\cos ۲۰$ را محاسبه کنید؟

۲-۱-۳ قرینه

دو زاویه $\alpha, -\alpha$ را قرینه یکدیگر می‌گویند. اگر در شکل مقابل، $\alpha = ۳۰$، نسبت‌های مثلثاتی زاویه ۳۰° در $\overset{\Delta}{OP'H}$ عبارتند از:



$$\sin ۳۰^\circ = y \qquad \sin(-۳۰^\circ) = -y = -\sin ۳۰^\circ = \frac{-۱}{۲}$$

$$\cos ۳۰^\circ = x \qquad \cos(-۳۰^\circ) = x = \cos ۳۰^\circ = \frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

$$\tan ۳۰^\circ = \frac{y}{x} \qquad \tan(-۳۰^\circ) = \frac{-y}{x} = -\tan ۳۰^\circ = \frac{-\sqrt{۳}}{۳}$$

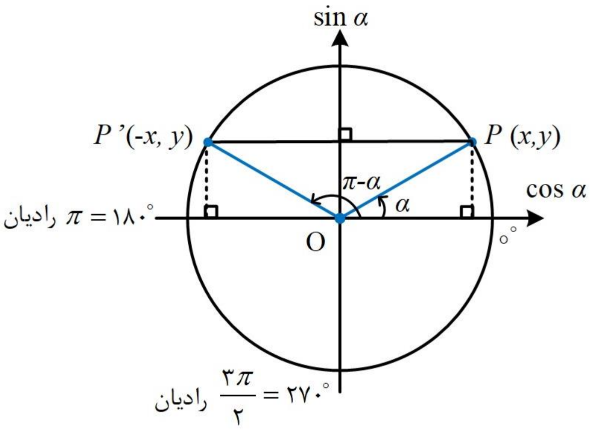
$$\cot ۳۰^\circ = \frac{x}{y} \qquad \cot(-۳۰^\circ) = \frac{-x}{y} = -\cot ۳۰^\circ = -\sqrt{۳}$$

تذکر ۳) قرینه یک نقطه به مختصات (x,y) نسبت به محور افقی نقطه‌ای به مختصات $(x,-y)$ است.

جمعبندی زوایای قرینه :

$$\sin(-x) = -\sin(x)\ ,\ \cos(-x) = \cos(x)\ ,\ \tan(-x) = -\tan(x)\ ,\ \cot(-x) = -\cot(x)$$

۳-۱-۳ مکمل



$$\alpha = ۳۰\ , r = ۱ \Rightarrow \sin ۳۰ = y\ , \cos ۳۰ = x\ , \tan ۳۰ = \frac{y}{x}$$

$$\sin ۱۵۰^\circ = \sin(۱۸۰^\circ - ۳۰^\circ) = y = \sin ۳۰^\circ = \frac{۱}{۲}$$

$$\cos ۱۵۰^\circ = \cos(۱۸۰^\circ - ۳۰^\circ) = -x = -\cos ۳۰^\circ = -\frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

$$\tan ۱۵۰^\circ = \frac{\sin ۱۵۰^\circ}{\cos ۱۵۰^\circ} = \frac{y}{-x} = -\tan ۳۰^\circ = -\frac{\sqrt{۳}}{۳}$$

$$\cot ۱۵۰^\circ = \frac{\cos ۱۵۰^\circ}{\sin ۱۵۰^\circ} = \frac{x}{-y} = -\cot ۳۰^\circ = -\sqrt{۳}$$

جمعبندی زوایای مکمل :

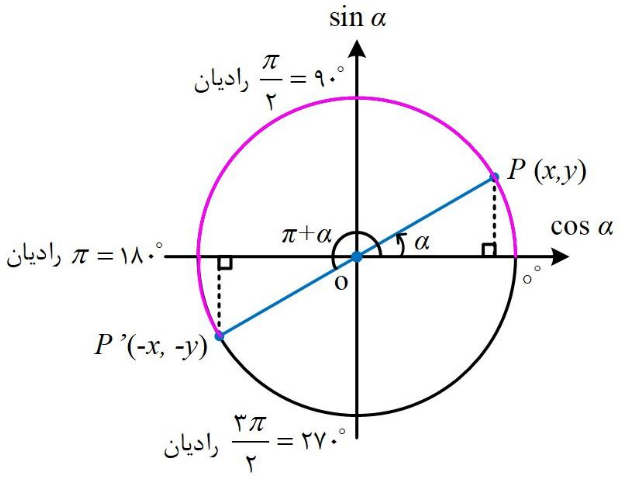
$$\sin(\pi - \alpha) = \sin\alpha\ ,\ \cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha\ ,\ \tan(\pi - \alpha) = -\tan\alpha\ ,\ \cot(\pi - \alpha) = -\cot\alpha$$

تذکر ۴) قرینه یک نقطه به مختصات (x,y) نسبت به محور عمودی نقطه‌ای به مختصات $(-x,y)$ است.

۳-۱-۴ اختلاف ۱۸۰ درجه

نسبت‌های مثلثاتی زاویه ۲۱۰° را به دست آورید.

انتهای کمان زاویه ۲۱۰° در ربع سوم واقع است در ضمن $۱۸۰^\circ+۳۰^\circ$، یعنی اختلاف دو زاویه ۲۱۰° و ۳۰° برابر با π رادیان است. در دایره مثلثاتی مقابل، اگر $\alpha=۳۰^\circ$ آنگاه با توجه به مختصات نقطه P'، نسبت‌های مثلثاتی زاویه ۲۱۰° عبارتند از:



$$\alpha=۳۰^\circ\ , r=۱\Rightarrow \sin ۳۰=y\ , \cos ۳۰=x\ , \tan ۳۰=\frac{y}{x}$$

$$\sin ۲۱۰^\circ=\sin(۱۸۰^\circ+۳۰^\circ)=-y=-\sin ۳۰^\circ=-\frac{۱}{۲}$$

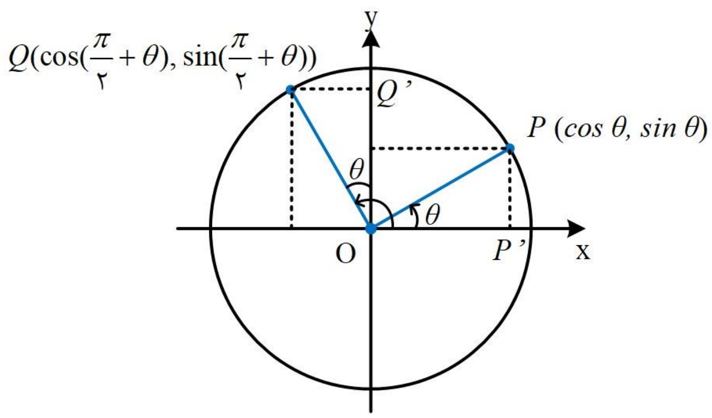
$$\cos ۲۱۰^\circ=\cos(۱۸۰^\circ+۳۰^\circ)=-x=-\cos ۳۰^\circ=-\frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

$$\tan ۲۱۰^\circ=\frac{\sin ۲۱۰^\circ}{\cos ۲۱۰^\circ}=\frac{-y}{-x}=\tan ۳۰^\circ=\frac{\sqrt{۳}}{۳}$$

$$\cot ۲۱۰^\circ=\frac{\cos ۲۱۰^\circ}{\sin ۲۱۰^\circ}=\frac{-x}{-y}=\cot ۳۰^\circ=\sqrt{۳}$$

قرینه نسبت به مبدا : هم طول و هم عرض قرینه می گردند !

۳-۱-۵ اختلاف ۹۰



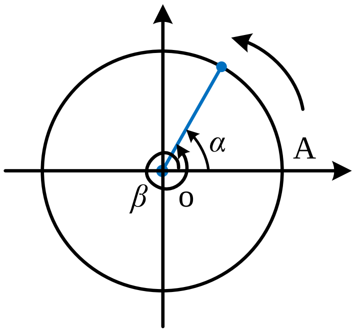
$$\theta, \frac{\pi}{۲}+\theta : \overset{\Delta}{OQQ'}=\overset{\Delta}{OPP'}\Rightarrow PP'=QQ', OP'=OQ'$$

$$x_Q=-y_P\Rightarrow \cos\left(\frac{\pi}{۲}+\theta\right)=-\sin\theta \quad , \ y_Q=x_P\Rightarrow \sin\left(\frac{\pi}{۲}+\theta\right)=\cos\theta$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{۲}+\theta\right)=\frac{\sin\left(\frac{\pi}{۲}+\theta\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{۲}+\theta\right)}=\frac{\cos\theta}{-\sin\theta}=-\cot\theta$$

$$\cot\left(\frac{\pi}{۲}+\theta\right)=\cdots\cdots$$

۳-۱-۶ ۳۶۰+



۳-۱-۷ جمع بندی

$\sin(\pi-\alpha)=\sin\alpha$ $\cos(\pi-\alpha)=-\cos\alpha$ $\tan(\pi-\alpha)=-\tan\alpha$ $\cot(\pi-\alpha)=-\cot\alpha$	$\sin(\pi+\alpha)=-\sin\alpha$ $\cos(\pi+\alpha)=-\cos\alpha$ $\tan(\pi+\alpha)=\tan\alpha$ $\cot(\pi+\alpha)=\cot\alpha$
$\sin\left(\frac{\pi}{۲}+\alpha\right)=\cos\alpha$ $\cos\left(\frac{\pi}{۲}+\alpha\right)=-\sin\alpha$ $\tan\left(\frac{\pi}{۲}+\alpha\right)=-\cot\alpha$ $\cot\left(\frac{\pi}{۲}+\alpha\right)=-\tan\alpha$	$\sin\left(\frac{\pi}{۲}-\alpha\right)=\cos\alpha$ $\cos\left(\frac{\pi}{۲}-\alpha\right)=\sin\alpha$ $\tan\left(\frac{\pi}{۲}-\alpha\right)=\cot\alpha$ $\cot\left(\frac{\pi}{۲}-\alpha\right)=\tan\alpha$
$\sin(۲k\pi+\alpha)=\sin\alpha$ $\cos(۲k\pi+\alpha)=\cos\alpha$ $\tan(۲k\pi+\alpha)=\tan\alpha$ $\cot(۲k\pi+\alpha)=\cot\alpha$	$\sin(۲k\pi-\alpha)=-\sin\alpha$ $\cos(۲k\pi-\alpha)=\cos\alpha$ $\tan(۲k\pi-\alpha)=-\tan\alpha$ $\cot(۲k\pi-\alpha)=-\cot\alpha$
$\sin(-\alpha)=-\sin\alpha$ $\cos(-\alpha)=\cos\alpha$ $\tan(-\alpha)=-\tan\alpha$ $\cot(-\alpha)=-\cot\alpha$	

۳-۲ روش حرفه ای (روش سریع دایره در ذهن)

نوع زاویه	نحوه محاسبه
$۲\pi \pm \alpha \quad , \quad \pi \pm \alpha$ $۳۶۰^\circ \pm \alpha \quad , \quad ۱۸۰^\circ \pm \alpha$	با توجه به اینکه زاویه در کدام ربع قرار دارد، علامت آن را می‌یابیم. مثلاً $\sin(\pi+\alpha) = -\sin\alpha$ ربع سوم سینوس منفی
$\frac{۳\pi}{۲} \pm \alpha \quad , \quad \frac{\pi}{۲} \pm \alpha$ $۲۷۰^\circ \pm \alpha \quad , \quad ۹۰^\circ \pm \alpha$	مانند بالاعمل می‌کنیم، با این تفاوت که پس از یافتن علامت، **sin** به **cos** و برعکس تبدیل می‌شود. مثلاً $\tan(۲۷۰^\circ - \alpha) = +\cot\alpha$ ربع سوم تانژانت مثبت
$-\alpha$	منفی از تمام نسبت‌های مثلثاتی به جز کسینوس عبور می کند: $\sin(-\alpha) = -\sin\alpha \ , \ \cos(-\alpha) = \cos\alpha \ ,$ $\tan(-\alpha) = -\tan\alpha \ , \ \cot(-\alpha) = -\cot\alpha$
$۲k\pi \pm \alpha \ , \ (۲k+۱)\pi \pm \alpha$	مضارب زوج π را حذف می‌کنیم و به جای مضارب فرد π، π قرار می‌دهیم. مثلاً $\sin\left(\frac{۵\pi}{۲}+\alpha\right) = \sin\left(۲\pi+\frac{\pi}{۲}+\alpha\right) = \sin\left(\frac{\pi}{۲}+\alpha\right) = +\cos\alpha$

خودمونی تر !

زاویه مجهول را در ناحیه اول فرض می کنیم ! نگران نباش !

اگر پای ۹۰ یا مضارب فرد ۹۰ وسط بود نسبت ها به برادر خود تبدیل می گردند (معادل ۹۰ =   )

اگر پای ۱۸۰ یا مضارب ۱۸۰ وسط بود نسبت تغییر نمی کند (معادل ۱۸۰ =   )

علامت هم براحتی با رسم دایره مشخص می گردد (تمرکز روی نسبت سمت چپ)

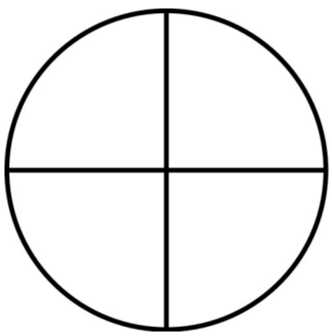
همواره می توانید، اگر عشق کردید، مضارب ۳۶۰ را اضافه و کم کنید (معادل ۳۶۰ =   )

با من باش با یک مثال »

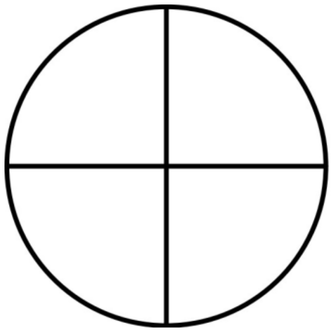
$\sin(\frac{-\pi}{۲}+x) = ?$

$\sin(\frac{-\pi}{۲}+x) = \boxed{}\cos x$

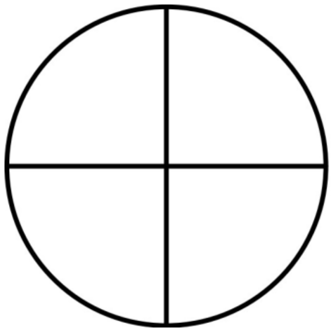
$\sin(\frac{-\pi}{۲}+x) = \boxed{-}\cos x$



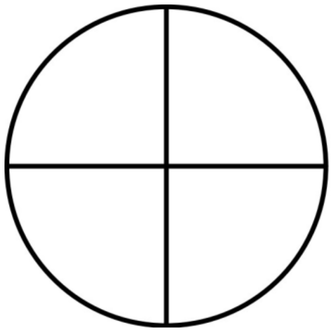
مثـــال ۲۶) شما تبدیل کنید



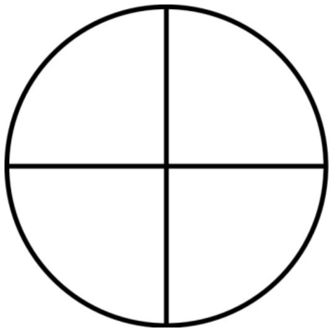
$\sin(\frac{۷\pi}{۲}-x)$



$\cos(\frac{۳}{۲}\pi-x)$



$tg(\frac{-۹\pi}{۲}+x)$



$\cot(\frac{+۳۲۱\pi}{۲}-x)$

۳-۳ یک جمع بندی خیلی مهم

	sin	cos	tan	cot
۰	۰	۱	۰	بی‌نهایت
۳۰	$\frac{۱}{۲}$	$\frac{\sqrt{۳}}{۲}$	$\frac{\sqrt{۳}}{۳}$	$\sqrt{۳}$
۴۵	$\frac{\sqrt{۲}}{۲}$	$\frac{\sqrt{۲}}{۲}$	۱	۱
۶۰	$\frac{\sqrt{۳}}{۲}$	$\frac{۱}{۲}$	$\sqrt{۳}$	$\frac{\sqrt{۳}}{۳}$
۹۰	۱	۰	بی‌نهایت	۰
۱۲۰	$\frac{\sqrt{۳}}{۲}$	$-\frac{۱}{۲}$	$-\sqrt{۳}$	$\frac{-\sqrt{۳}}{۳}$
۱۵۰	$\frac{۱}{۲}$	$-\frac{\sqrt{۳}}{۲}$	$\frac{-\sqrt{۳}}{۳}$	$-\sqrt{۳}$
۱۸۰	۰	-۱	۰	بی‌نهایت
۲۷۰	-۱	۰	بی‌نهایت	۰
۳۶۰	۰	۱	۰	بی‌نهایت

بی نهایت یا تعریف نشده ، مساله این است !

β	$\frac{\pi}{۲}+\alpha$	$\pi+\alpha$	$\frac{۳\pi}{۲}+\alpha$	$\frac{\pi}{۲}-\alpha$	$\pi-\alpha$	$\frac{۳\pi}{۲}-\alpha$	$۲\pi-\alpha$
$\sin\beta$	$\cos\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\sin\alpha$
$\cos\beta$	$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\sin\alpha$	$\cos\alpha$
$\tan\beta$	$-\cot\alpha$	$\tan\alpha$	$-\cot\alpha$	$\cot\alpha$	$-\tan\alpha$	$\cot\alpha$	$-\tan\alpha$
$\cot\beta$	$-\tan\alpha$	$\cot\alpha$	$-\tan\alpha$	$\tan\alpha$	$-\cot\alpha$	$\tan\alpha$	$-\cot\alpha$

مثال ۲۷ (تمرین) نسبت‌های $\frac{۳\pi}{۲}\pm\alpha$ را محاسبه نمائید.

4 مثال های اولیه

مثــال ۲۸) محاسبه نمائید:

$$\cos(\frac{۷\pi}{۲}-\frac{\pi}{۴})=\cos(۳/۵\pi-\frac{\pi}{۴})=\cos(۲\pi+\frac{۳\pi}{۲}-\frac{\pi}{۴})=-\sin(\frac{\pi}{۴})=-\frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

$$\cot(\frac{۱۱\pi}{۶})=$$

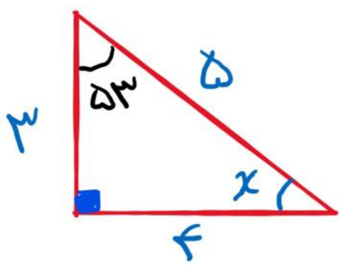
$$\sin(\frac{-۱۰۰۰\pi}{۳})=-\sin(\frac{۹۹۹\pi+\pi}{۳})=-\sin(۳۳۳\pi+\frac{\pi}{۳})=$$

$$-\sin(۳۳۲\pi+\pi+\frac{\pi}{۳})=-\sin(\pi+\frac{\pi}{۳})=-(-\sin(\frac{\pi}{۳}))=\frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

$$\tan(\frac{۷۱\pi}{۲}+\frac{\pi}{۴})=$$

مثــال ۲۹) اگر داشته باشیم $\sin(x)=\frac{۳}{۵}$، حاصل $\cos(\frac{۱۷\pi}{۲}+x)$ را محاسبه کنید.

مثلث طلایی- فیزیک



$\sin x=\sin ۳۷=\frac{۳}{۵}=۰/۶=\cos ۵۳$

$\cos x=\cos ۳۷=\frac{۴}{۵}=۰/۸=\sin ۵۳$

$\tan x=\tan ۳۷=\frac{۳}{۴}=\cot ۵۳$

مثــال ۳۰) در مثلث ABC نشان دهید $\tan(A+B)=-\tan(C)$, $\sin(\frac{A}{۲})=\cos(\frac{B+C}{۲})$

$$A+B+C=\pi\rightarrow A+B=\pi-C\ \rightarrow$$
$$\tan(A+B)=\tan(\pi-C)=-\tan(C)\rightarrow\tan(A+B)+\tan(C)=۰$$

دومی تمرین :

مثال ۳۱) اگر $\tan(۳۵)=۲a-۱$ باشد حاصل $\dfrac{\sin(۱۴۵)-\sin(۳۰۵)}{\cos(-۳۲۵)}$ چقدر است ؟(بر حسب a)

مثال ۳۲)(تمرین) اگر $\tan(۲۰)=۰/۴$ باشد حاصل $\dfrac{\sin(۲۵۰)+\sin(۷۰۰)}{\cos(۵۶۰)-\cos(۱۱۰)}$ چقدر است ؟

مثال ۳۳) حاصل عبارت زیر را بدست آورید

$$A=\sin(\frac{۳\pi}{۴})+\sin(\frac{۵\pi}{۴})+\sin(\frac{۷\pi}{۴})+\sin(\frac{۹\pi}{۴})=?$$

$$A=\sin(\pi-\frac{\pi}{۴})+\sin(\pi+\frac{\pi}{۴})+\sin(۲\pi-\frac{\pi}{۴})+\sin(۲\pi+\frac{\pi}{۴})=\sin\frac{\pi}{۴}-\sin\frac{\pi}{۴}-\sin\frac{\pi}{۴}+\sin\frac{\pi}{۴}=۰$$

مثال ۳۴) حاصل عبارت زیر را بدست آورید

$$\sin(\frac{\pi}{۷})+\cos(\frac{۵\pi}{۱۴})-۲\sin(\frac{۶\pi}{۷})$$

هر وقت زاویه ها رند نبودند، جمع و تفریقشان را چک کنید خدا بزرگ است . اتفاقی جذاب در راه است !

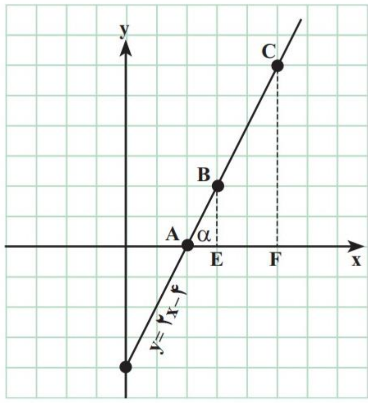
موارد دیگر در متفرقه

5 شیب خط و مثلثات

فعالیت

نمودار خط y=۲x−۴ در شکل روبه‌رو رسم شده است. دو نقطهٔ B و C روی این خط را درنظر بگیرید و خطی از آنها به محور xها عمود کنید. پای عمودها را به ترتیب، E و F بنامید.

الف) تانژانت زاویهٔ α را به‌دست آورید.



ب) شیب این خط را پیدا کنید.

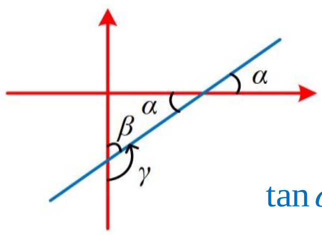
$$\text{شیب خط}=\frac{\text{تفاضل عرض‌ها}}{\text{تفاضل طول‌ها}}=\ldots\ldots\ldots\ldots$$

پ) از مقایسهٔ قسمت (الف) و (ب) چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟ توضیح دهید.

شیب هر خط که محور افقی را قطع می‌کند، برابر است با تانژانت زاویهٔ بین آن خط و جهت مثبت محور افقی. به‌عبارت دیگر، اگر α زاویه‌ای باشد که خط با جهت مثبت محور افقی می‌سازد، آنگاه:

$$\text{شیب خط}=\tan\alpha$$

مثال ۳۵) زاویه خط $y=\sqrt{۳}x-۳$ با محور $+x$ و $-y$ پیدا کنید.



$$\tan\alpha=\sqrt{۳}\to\alpha=\frac{\pi}{۳}=۶۰^\circ\Rightarrow\beta=۹۰-\alpha=۳۰\Rightarrow\gamma=۱۸۰-\beta=۱۵۰$$

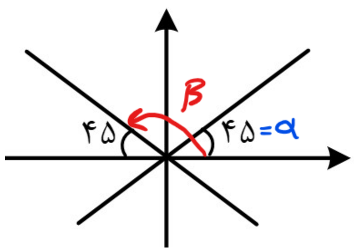
علامت و زوایه : محور داده شده نقطه شروع و علامت مثبت، معادل مثبت مثلثاتی می باشد.

مثال ۳۶) معادله خطی بنویسید که با جهت y− زاویه ۳۰ درجه بسازد و از نقطه (۲و۵) بگذرد.

مثال ۳۷) (تمرین) زاویه بین دو خط $y=-x+۵\,,\ y=x+۳$ را بیابید.

$$۱=\tan\alpha\Rightarrow\alpha=\frac{\pi}{۴}=۴۵$$

$$-۱=\tan\beta\Rightarrow\beta=\pi-\frac{\pi}{۴}=\frac{۳\pi}{۴}=۱۳۵\Rightarrow ?=\beta-\alpha=۹۰^\circ$$

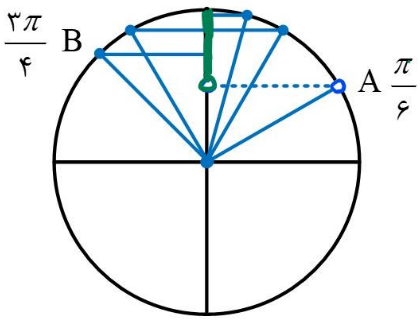


6 نامساوی ها و مثلثات

۶-۱ یک مساله تیپ

مثـال ۳۸) اگر $\frac{۳\pi}{۴} < x < \frac{\pi}{۶}$ باشد حدود $\sin(x)$ را بدست آورید

کافیست یک دایره رسم کنید !

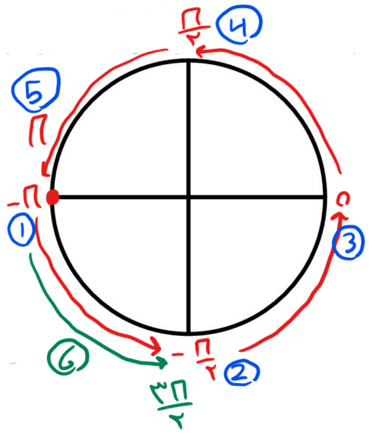


$$۳۰ < x < ۱۳۵ \Rightarrow \sin ۳۰ < \sin x \le ۱$$

$$\frac{۱}{۲} < \sin x \le ۱ \Rightarrow \sin x \in \left(\frac{۱}{۲}, ۱\right]$$

تمرین :

مثـال ۳۹) اگر $\frac{-\pi}{۳} < x < \frac{\pi}{۲}$ ، $\cos(۳x) = \frac{m-۱}{۲}$ باشند حدود m را بدست آورید



$$\frac{-\pi}{۳} < x < \frac{\pi}{۲} \Rightarrow \frac{-۳\pi}{۳} < ۳x < \frac{۳\pi}{۲} \Rightarrow -\pi < ۳x < \frac{۳\pi}{۲}$$

$$-۱ \le \cos(۳x) \le ۱ \Rightarrow -۱ \le \frac{m-۱}{۲} \le ۱ \Rightarrow -۲ \le m-۱ \le ۲ \Rightarrow$$

۶-۲ چند رابطه مهم

$$-\sqrt{a^۲+b^۲} \le a\sin(x) + b\cos(x) \le \sqrt{a^۲+b^۲}$$

مثـال ۴۰) نسبت بیشترین مقدار به کمترین مقدار عبارت $\sin(x) + \cos(x) + ۱$ را بدست آورید ؟

$$\sin(x) + \cos(x) \Rightarrow a = ۱, b = ۱ \Rightarrow -\sqrt{۲} \le \sin(x) + \cos(x) \le \sqrt{۲}$$

$$۱ - \sqrt{۲} \le \sin(x) + \cos(x) + ۱ \le \sqrt{۲} + ۱ \Rightarrow$$

$$\frac{۱}{۲^{n-۱}} \le \sin^{۲n}(x) + \cos^{۲n}(x) \le ۱$$

مثـال ۴۱) حداکثر عبارت $\sin^۴(x) + \cos^۴(x)$ چقدر است؟

مثـال ۴۲)(تمرین) حداکثر مقدار عبارت $-۵\sin x + ۱۲\cos y$ چقدر است ؟

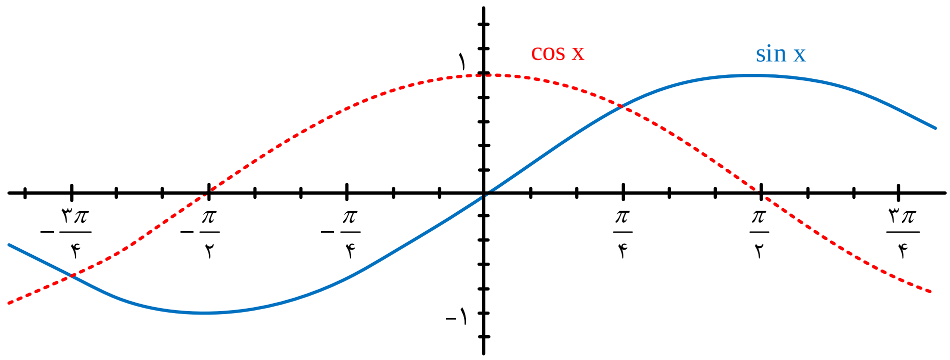
چند مورد مهم در متفرقه

$$۰<x<\frac{\pi}{۲}\rightarrow\ ۰<\sin(x)<۱\Rightarrow\ ۰<\sin^{n}(x)<\sin(x)<\sqrt[n]{\sin(x)}<۱$$

$$۰<x<\frac{\pi}{۲}\rightarrow\ \tan(x)+\cot(x)\geq ۲\quad (x=\frac{\pi}{۴})\qquad a>۰\rightarrow a+\frac{۱}{a}\geq ۲$$

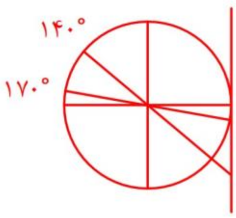
$$\frac{\pi}{۲}<x<\pi\rightarrow\ \tan(x)+\cot(x)\leq -۲\quad (x=\frac{\pi}{۴})\qquad a<۰\rightarrow a+\frac{۱}{a}\leq -۲$$

۶-۳ مقایسه نسبتهای مثلثاتی



$$۰<x<\frac{\pi}{۴}\rightarrow \sin(x)<\cos(x)\ ,\ \tan(x)<\cot(x)\qquad \frac{\pi}{۴}<x<\frac{\pi}{۲}\rightarrow \sin(x)>\cos(x)\ ,\ \tan(x)>\cot(x)$$

مثــال ۴۳) کدام یک عددی کوچکتر می‌باشد؟



۱) $\tan ۸۰$ I +　　۲) $\tan ۱۴۰$ II -

۳) $\tan ۱۷۰$ II -　　۴) $\tan ۱۹۰$ III +

مثــال ۴۴) (تمرین) کدام یک عددی کوچکتری است؟

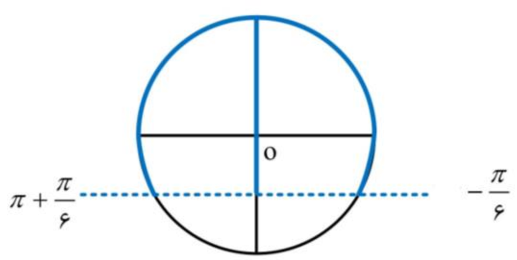
۱) $\sin ۵۰$　۲) $\cos ۶۰$　۳) $\cos ۱۲۰$　۴) $\cos ۲۹۰$

$$\cos ۱۲۰<۰\ ,\ \cos ۲۹۰=\cos ۷۰\ \Rightarrow \cos ۷۰<\cos ۶۰<\cos ۵۰<\sin ۵۰$$

۶-۴ حدود خود زاویه!

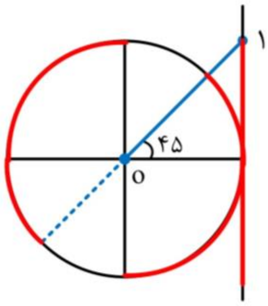
حدود زاویه θ را مشخص کنید (سینوسی : تمرین)

$\sin\theta>\frac{-۱}{۲}$



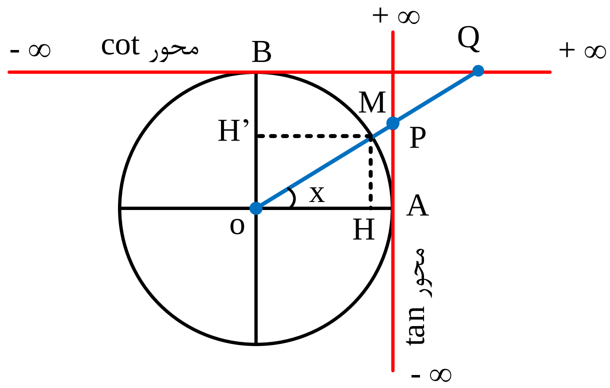
$-\frac{\pi}{۶}<x<\pi+\frac{\pi}{۶}$

$\tan\theta\leq ۱$



7 روابط مثلثاتی (قسمت اول)

۷-۱ روابط اصلی و فرعی



$OH' = \sin x$

$OH = \cos x$

$AP = \tan x$

$BQ = \cot x$

$MH = OH' = \sin x \;,\; MH' = OH = \cos x$

$OH^{۲} + HM^{۲} = OM^{۲} = ۱$

$\cos^{۲} x + \sin^{۲} x = ۱$

$\cos^{۲} x = ۱ - \sin^{۲} x$

$$\overset{\Delta}{OMH} \sim \overset{\Delta}{OPA} \to \frac{MH}{AP} = \frac{OH}{OA} \to \frac{\sin x}{\tan x} = \frac{\cos x}{۱} \to \frac{\tan x}{۱} = \frac{\sin x}{\cos x} \to \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$\overset{\Delta}{OMH'} \sim \overset{\Delta}{OBQ} \to \cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$$

$$\sin^{۲} x + \cos^{۲} x = ۱ \to \div \cos^{۲} x \to ۱ + \tan^{۲} x = \frac{۱}{\cos^{۲} x}$$

$$\sin^{۲} x + \cos^{۲} x = ۱ \to \div \sin^{۲} x \to ۱ + \cot^{۲} x = \frac{۱}{\sin^{۲} x}$$

$$۱ = \tan(x)\cot(x) \,,\, \tan(x) = \frac{۱}{\cot(x)}$$

$$\sin^{۲} x = \frac{۱}{۱+\cot^{۲} x} = \frac{\tan^{۲} x}{۱+\tan^{۲} x} \quad , \quad \cos^{۲} x = \frac{۱}{۱+\tan^{۲} x} = \frac{\cot^{۲} x}{۱+\cot^{۲} x}$$

مثال ۴۵) اگر $\tan(x) = -۰/۵$ باشد و بدانیم $\cos(x) < ۰$، مقدار $\sin(x)$ را محاسبه کنید؟

$$\tan(x) = -۰/۵ \to \cot x = -۲ \to ۱+\cot^{۲} x = \frac{۱}{\sin^{۲} x} \to ۱+۴ = \frac{۱}{\sin^{۲} x}$$

$$\to \sin^{۲} x = \frac{۱}{۵} \to \sin x = \pm\frac{۱}{\sqrt{۵}} \to \cos x < ۰, \tan x > ۰ \to \sin x > ۰ \to \sin x = \frac{۱}{\sqrt{۵}} = \frac{\sqrt{۵}}{۵}$$

رسم مثلث وای وای !!

مثال ۴۶) با فرض x در ناحیه دوم باشد، حاصل $\sqrt{\dfrac{\cot^{۲}(x)}{۱+\cot^{۲}(x)}}$ کدام است؟

مثال ۴۷) مقدار عددی عبارت $\cos^2(\frac{\pi}{8})+\cos^2(\frac{3\pi}{8})$ را بدست آورید.

تذکر ۵) بازهم تاکید کنیم که اگر زوایا رند نبود به جمع و تفریقشان دقت کنید

۷-۲ اتحادهای اولیه

• $(\sin x \pm \cos x)^2 = \sin^2 x + \cos^2 x \pm 2\sin x \cos x = 1 \pm 2\sin x \cos x$

•• $\sin^4 x + \cos^4 x = 1 - 2\sin^2 x \cos^2 x$

$1 = (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 = \sin^4 x + \cos^4 x + 2\sin^2 x \cos^2 x \to ......$

••• $\sin^6 x + \cos^6 x = 1 - 3\sin^2 x \cos^2 x$

$(A+B)^3 = A^3 + B^3 + 3AB(A+B)$

$1 = (\sin^2 x + \cos^2 x)^3 = \sin^6 x + \cos^6 x + 3\sin^2 x \cos^2 x(\sin^2 x + \cos^2 x) = ...$

•••• $\frac{1}{\sin^2 x} + \frac{1}{\cos^2 x} = \frac{1}{\sin^2 x \cos^2 x} = (1+\tan^2 x)(1+\cot^2 x) = 2 + \tan^2 x + \cot^2 x = (\tan x + \cot x)^2$

$\frac{1}{\sin^2 x} + \frac{1}{\cos^2 x} = (1+\tan^2 x) + (1+\cot^2 x) = 2 + \tan^2 x + \cot^2 x = (\tan x + \cot x)^2$

••••• $\sin^4 x + \cos^2 x = \sin^2 x + \cos^4 x$

$\cos^4 x - \sin^4 x = (\cos^2 x - \sin^2 x)(\cos^2 x + \sin^2 x) \to \cos^4 x - \sin^4 x = \cos^2 x - \sin^2 x \to ...$

***** $2\sin x \cos x = \sin 2x$

•••••• $\tan x + \cot x = \frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin x \cos x} = \frac{1}{\sin x \cos x} = \frac{2}{\sin 2x}$

مثال ۴۸) سه مساله نمونه زیر را حل نمائید

۱. $\sin x + \cos x = \frac{1}{3} \to A = \sin x \cos x = ?$

$\to \wedge^2 : \sin^2 x + \cos^2 x + 2\sin x \cos x = \frac{1}{9} \to 1 + 2A = \frac{1}{9} \to A = \frac{-4}{9}$

---

۲. $\sin x \cos x = a \to t = \sin x - \cos x = ?$

$t^2 = 1 - 2\sin x \cos x \to t^2 = 1 - 2a \to t = \pm\sqrt{1-2a}$

---

۳. $\sin^4 x + \cos^4 x = \frac{3}{5} \to \sin^6 x + \cos^6 x = ?$

مثال ۴۹) حاصل $\frac{۳\tan^{۲}(x)}{\cos^{۲}(x)}-\frac{۱}{\cos^{۶}(x)}$ را ساده کنید .

مثال ۵۰) هرگاه $\sin x\cos x=\frac{۱}{۲}$ حاصل $\tan^{۲}x+\cot^{۲}x$ چقدر می‌گردد؟

$$\tan x+\cot x=\frac{۱}{\sin x\cos x}=۲\Rightarrow {}^{\wedge}۲$$

$$\tan^{۲}x+\cot^{۲}x+۲\tan x\cot x=۴\Rightarrow\tan^{۲}x+\cot^{۲}x+۲=۴\Rightarrow$$

مثال ۵۱) دو رابطه مقابل را اثبات کنید (B: تمرین)

$$A)\ ۱-\cot^{۴}x=\frac{۲}{\sin^{۲}x}-\frac{۱}{\sin^{۴}x}$$

$$\frac{۲}{\sin^{۲}x}-\frac{۱}{\sin^{۴}x}=\frac{۲\sin^{۲}x-۱}{\sin^{۴}x}=\frac{\sin^{۲}x+\sin^{۲}x-۱}{\sin^{۴}x}=\frac{\sin^{۲}x-(۱-\sin^{۲}x)}{\sin^{۴}x}=\frac{\sin^{۲}x-\cos^{۲}x}{\sin^{۴}x}=$$

$$\frac{(\sin^{۲}x-\cos^{۲}x)\times۱}{\sin^{۴}x}=\frac{(\sin^{۲}x-\cos^{۲}x)\times(\sin^{۲}x+\cos^{۲}x)}{\sin^{۴}x}=\frac{\sin^{۴}x-\cos^{۴}x}{\sin^{۴}x}=\frac{\sin^{۴}x}{\sin^{۴}x}-\frac{\cos^{۴}x}{\sin^{۴}x}=۱-\cot^{۴}x$$

$$B)\ \tan^{۲}x-\sin^{۲}x=\tan^{۲}x\sin^{۲}x$$

حل یک تمرین کتاب درسی دهم

با فرض با معنی بودن هر کسر، درستی هر یک از تساوی‌های زیر را بررسی کنید.

الف) $\frac{۱}{\cos x}-\tan x=\frac{\cos x}{۱+\sin x}$

ب) $\frac{\cos\theta}{۱+\sin\theta}=\frac{۱-\sin\theta}{\cos\theta}$

پ) $\frac{۱+\tan\alpha}{۱+\cot\alpha}=\tan\alpha$

ت) $۱-\frac{\cos^{۲}x}{۱+\sin x}=\sin x$

$$\frac{\cos\theta}{۱+\sin\theta}\times\frac{۱-\sin\theta}{۱-\sin\theta}=\frac{\cos\theta(۱-\sin\theta)}{۱-\sin^{۲}\theta}=\frac{\cos\theta(۱-\sin\theta)}{\cos^{۲}\theta}=\frac{۱-\sin\theta}{\cos\theta}$$

$$۱-\frac{\cos^{۲}x}{۱+\sin x}=\frac{۱+\sin x}{۱+\sin x}-\frac{\cos^{۲}x}{۱+\sin x}=\frac{۱+\sin x-\cos^{۲}x}{۱+\sin x}=\frac{\sin x+(۱-\cos^{۲}x)}{۱+\sin x}=\frac{\sin x+\sin^{۲}x}{۱+\sin x}=\frac{\sin x(۱+\sin x)}{۱+\sin x}$$

موارد خفنی در متفرقه !

8 فرمول نامه مثلثات دهم

$$\tan x=\frac{\sin x}{\cos x} \quad , \quad \cot x=\frac{\cos x}{\sin x} \quad , \quad ۱=\tan(x)\cot(x) \quad , \quad \tan(x)=\frac{۱}{\cot(x)}$$

$$\sin^۲ x+\cos^۲ x=۱ \Rightarrow \cos^۲ x=۱-\sin^۲ x \Rightarrow \sin^۲ x=۱-\cos^۲ x$$

$$۱+\tan^۲ x=\frac{۱}{\cos^۲ x} \quad , \quad ۱+\cot^۲ x=\frac{۱}{\sin^۲ x}$$

$$(\sin x\pm\cos x)^۲=۱\pm۲\sin x\cos x$$

$$\sin^۴ x+\cos^۴ x=۱-۲\sin^۲ x\cos^۲ x \quad , \quad \sin^۶ x+\cos^۶ x=۱-۳\sin^۲ x\cos^۲ x$$

$$\tan x+\cot x=\frac{۱}{\sin x\cos x}$$

$$\sin^۴ x+\cos^۲ x=\sin^۲ x+\cos^۴ x$$

$$\frac{۱}{\sin^۲ x}+\frac{۱}{\cos^۲ x}=\frac{۱}{\sin^۲ x\cos^۲ x}=(۱+\tan^۲ x)(۱+\cot^۲ x)=$$

$$۲+\tan^۲ x+\cot^۲ x=(\tan x+\cot x)^۲$$

9 مسائل و موارد متفرقه (اختیاری)

10 کاردرخانه

11 یادداشت

امیر وفائی

مدرس ریاضیات دوره دوم متوسطه از پایه تا کنکور – متخصص هر دو رشته ریاضی و تجربی

طراح سوالات همه شاخه های ریاضی کانون فرهنگی آموزش (قلمچی)

رتبه ۲۶ کنکور سراسری

نفر اول دوره کارشناسی و کارشناسی ارشد مهندسی عمران دانشگاه صنعتی شریف

پذیرفته شده دوره دکتری مستقیم مهندسی عمران دانشگاه صنعتی شریف

رکوردار معدل دانشکده عمران دانشگاه صنعتی شریف از بدو تاسیس تا کنون

کسب عنوان دانشجوی نمونه دانشکده عمران و دانشگاه صنعتی شریف در سال ۱۳۹۴ و ۱۳۹۵

سابقه بیش از ۱۰ ترم استادیاری (دستیار استاد) در دروس مختلف تخصصی و عمومی دانشگاه صنعتی شریف

گذراندن دوره فرعی رشته ریاضی دانشگاه صنعتی شریف

استاد حل تمرین ریاضی دانشگاه صنعتی شریف

حضور در مدرسه شهیدبشهتی ۱ (تیزهوشان) از سال ۹۲ به عنوان مشاور و مدرس ریاضی

تالیف کتاب تا کنکور با همکاری مدرسه تیزهوشان

مبتکر برنامه های جمعبندی ویژه ۱۰۰-۱۰۰ در همه پایه ها با مشابهت ۱۰۰ درصدی در کنکور سراسری

آموزش مفهومی و متفاوت درس ریاضی منطبق بر برنامه دقیق تدریس و آزمون و برنامه تست

مدرس رتبه های برتر (تک رقمی و دو رقمی)

www.Donat.Academy

AMIRVAFAEI6